เอกสาร
สรุปเนื้อหา
ที่ต้องรู้

รายวิชา คณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (พค31001)

หลักสูตรการศึกษานอกระบบระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน
พุทธศักราช 2551

สำนักงานส่งเสริมการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัย
สำนักงานปลัดกระทรวงศึกษาธิการ กระทรวงศึกษาธิการ
เอกสารทางวิชาการลำดับที่ 9/2559

เอกสารสรุปเนื้อหาที่ต้องรู้

รายวิชาคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

รหัส พค31001

หลักสูตรการศึกษานอกระบบระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน

พุทธศักราช 2551

สำนักงานส่งเสริมการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัย
สำนักงานปลัดกระทรวงศึกษาธิการ
กระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

กระทรวงศึกษาธิการมีนโยบายยกระดับคุณภาพการศึกษาทุกระดับการศึกษา สำนักงาน กศน. ในฐานะผู้รับผิดชอบในการจัดการศึกษาให้กับกลุ่มเป้าหมายประชาชนทั่วไปที่อยู่นอกระบบโรงเรียน โดยใช้หลักสูตรการศึกษานอกระบบระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ในการจัดการศึกษาให้กับกลุ่มเป้าหมายดังกล่าว และเพื่อเป็นการตอบสนองนโยบายของกระทรวงศึกษาธิการในการยกระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของผู้เรียน กศน. หลักสูตรการศึกษานอกระบบระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ให้สูงขึ้น สำนักงาน กศน. จึงได้จัดทำสรุปเนื้อหาที่ต้องรู้ ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนเข้าถึงสื่อได้สะดวก รวดเร็ว อันจะส่งผลให้ผู้เรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนดีขึ้น

สรุปเนื้อหาที่ต้องรู้ มีเนื้อหามาจากการนำหนังสือเรียนของสำนักงาน กศน. มาสรุปเนื้อหาประเด็นสำคัญที่สอดคล้องตามผังการออกข้อสอบในแต่ละรายวิชาของสำนักงาน กศน. สำหรับเอกสารสรุปเนื้อหาที่ต้องรู้นี้ สำนักงาน กศน. ได้จัดทำรายวิชาบังคับ ทั้งสิ้น 5 สาระ รวม 42 รายวิชา ทั้งนี้ สำนักงาน กศน. ได้เชิญผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหา ศึกษานิเทศก์ นักวิชาการศึกษา ครูผู้สอน และผู้เกี่ยวข้อง มาสรุปเนื้อหาที่ต้องรู้ ในรายวิชาดังกล่าว

สำนักงาน กศน. หวังเป็นอย่างยิ่งว่าจะเป็นประโยชน์กับผู้เรียน กศน. หลักสูตรการศึกษานอกระบบระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ตามสมควร จึงขอขอบคุณ สถาบัน กศน. ภาคทุกภาค สถาบันการศึกษาทางไกล ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหา ศึกษานิเทศก์ นักวิชาการศึกษา ครูผู้สอน และผู้เกี่ยวข้อง มา ณ โอกาสนี้

(นายสุรพงษ์ จำจด)
เลขาธิการ กศน.
สิงหาคม 2559

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

คำแนะนำการใช้เอกสารสรุปเนื้อหาที่ต้องรู้

เอกสารสรุปเนื้อหาที่ต้องรู้ รายวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย รหัส พค 31001 ใช้สำหรับนักศึกษาหลักสูตรการศึกษานอกระบบระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 แบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ

ส่วนที่ 1 โครงสร้างรายวิชา แบบทดสอบก่อนเรียน โครงสร้างของแต่ละบท เนื้อหาสาระ กิจกรรมท้ายบท และแบบทดสอบหลังเรียน

ส่วนที่ 2 เฉลยกิจกรรมท้ายบท และเฉลยแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน

วิธีใช้เอกสารสรุปเนื้อหาที่ต้องรู้

ให้นักศึกษาดำเนินการตามขั้นตอน ดังนี้

1. ศึกษารายละเอียดโครงสร้างรายวิชาโดยละเอียด เพื่อให้ทราบว่านักศึกษาต้องเรียนรู้เนื้อหาในเรื่องใดบ้างในรายวิชานี้
2. วางแผนเพื่อกำหนดระยะเวลาและจัดเวลาที่นักศึกษามีความพร้อมที่จะศึกษาเอกสารสรุปเนื้อหาที่ต้องรู้ เพื่อให้สามารถศึกษารายละเอียดของเนื้อหาได้ครบทุกบท
3. ทำแบบทดสอบก่อนเรียน เพื่อทราบพื้นฐานความรู้เดิมของนักศึกษา โดยตรวจสอบคำตอบจากเฉลยแบบทดสอบก่อนเรียนท้ายเล่ม
4. ศึกษาเนื้อหาสาระในแต่ละบทอย่างละเอียดให้เข้าใจ และทำกิจกรรมท้ายบทที่กำหนดไว้ให้ครบถ้วน
5. เมื่อทำกิจกรรมท้ายบทเสร็จแต่ละกิจกรรมแล้ว นักศึกษาสามารถตรวจสอบคำตอบได้จากเฉลยท้ายเล่ม หากนักศึกษายังทำกิจกรรมไม่ถูกต้อง ให้นักศึกษากลับไปทบทวนเนื้อหาสาระในเรื่องนั้นซ้ำจนกว่าจะเข้าใจ
6. เมื่อศึกษาเนื้อหาสาระครบทุกบทแล้ว ให้นักศึกษาทำแบบทดสอบหลังเรียนและตรวจคำตอบจากเฉลยท้ายเล่มว่านักศึกษาสามารถทำแบบทดสอบได้ถูกต้องทุกข้อหรือไม่ หากข้อใดยังไม่ถูกต้อง ให้นักศึกษากลับไปทบทวนเนื้อหาสาระในเรื่องนั้นให้เข้าใจอีกครั้งหนึ่ง นักศึกษาควรทำแบบทดสอบหลังเรียนให้ได้คะแนนมากกว่าแบบทดสอบก่อนเรียน และควรได้คะแนนไม่น้อยกว่าร้อยละ 60 ของแบบทดสอบทั้งหมด เพื่อให้มั่นใจว่าจะสามารถสอบปลายภาคผ่าน
7. หากนักศึกษาได้ทำการศึกษาเนื้อหาสาระแล้วยังไม่เข้าใจ นักศึกษาสามารถสอบถามและขอคำแนะนำได้จากครูหรือแหล่งค้นคว้าเพิ่มเติมอื่นๆ

8. เอกสารสรุปเนื้อหาที่ต้องรู้เล่มนี้มี 7 บท คือ

   บทที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ

   บทที่ 2 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

   บทที่ 3 เซต

   บทที่ 4 การให้เหตุผล

   บทที่ 5 อัตราส่วนตรีโกณมิติและการนำไปใช้

   บทที่ 6 การใช้เครื่องมือและการออกแบบผลิตภัณฑ์

   บทที่ 7 สถิติเบื้องต้น

   บทที่ 8 ความน่าจะเป็น

   บทที่ 9 การใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในงานอาชีพ

หมายเหตุ : ให้ครูนำกิจกรรมท้ายบทในแต่ละบท มาประเมินนักศึกษา โดยเลือกเรื่องที่มีความจำเป็นและสำคัญ เพื่อเป็นคะแนนระหว่างภาค

โครงสร้างรายวิชาคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
(พค 31001)

สาระสำคัญ

มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับจำนวนและตัวเลข เศษส่วน ทศนิยมและร้อยละ การวัด เรขาคณิต สถิติและความน่าจะเป็นเบื้องต้น

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. ระบุหรือยกตัวอย่างเกี่ยวกับจำนวนและตัวเลขเศษส่วน ทศนิยมและร้อยละ การวัด เรขาคณิต สถิติ และความน่าจะเป็นเบื้องต้นได้
2. สามารถคิดคำนวณและแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับจำนวนนับเศษส่วน ทศนิยม ร้อยละ การวัด เรขาคณิตได้

ขอบข่ายเนื้อหา

บทที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ
บทที่ 2 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ
บทที่ 3 เซต
บทที่ 4 การให้เหตุผล
บทที่ 5 อัตราส่วนตรีโกณมิติและการนำไปใช้
บทที่ 6 การใช้เครื่องมือและการออกแบบผลิตภัณฑ์
บทที่ 7 สถิติเบื้องต้น
บทที่ 8 ความน่าจะเป็น
บทที่ 9 การใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในงานอาชีพ

สื่อการเรียนรู้

เอกสารสรุปเนื้อหาที่ต้องรู้

แบบทดสอบก่อนเรียน

1. ข้อใด**ไม่ถูกต้อง**
   ก. 0.001001001... เป็นจำนวนตรรกยะ
   ข. 0.110110110110... เป็นจำนวนอตรรกยะ
   ค. 0.59999... เป็นจำนวนตรรกยะ
   ง. π เป็นจำนวนอตรรกยะ

2. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
   ก. $\frac{22}{7}$ เป็นจำนวนตรรกยะ
   ข. 3π เป็นจำนวนตรรกยะ
   ค. ถ้า x เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว x^2 เป็นจำนวนตรรกยะ
   ง. 1.3333... เป็นจำนวนอตรรกยะ

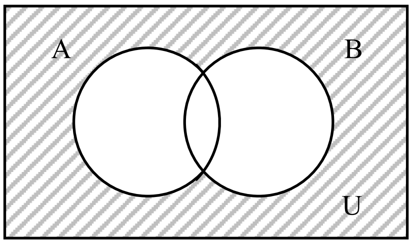
3. จงหาค่าของ $\left(\sqrt{8}+\sqrt{18}\right)^2$
   ก. $5\sqrt{5}$
   ข. $25\sqrt{2}$
   ค. $25\sqrt{5}$
   ง. 50

4. $\left(\frac{9x^2y^2}{2x^5y}\right)\left(\frac{10}{18y}\right)$ ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายตรงกับข้อใด
   ก. $\frac{5}{2y}$
   ข. $\frac{5}{2x^3}$
   ค. $\frac{2}{x}$
   ง. $\frac{2}{y^2}$

5. $\sqrt[3]{54}\cdot\sqrt[3]{4}$ ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายตรงกับข้อใด
   ก. 4
   ข. 6
   ค. 12
   ง. 16

6. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
   ก. เซตของสระในภาษาอังกฤษคือ {a, e, i, o, y}
   ข. เซตของจำนวนบวก ตั้งแต่ 2 ถึง 6 คือ {2, 3, 4, 5}
   ค. เซตของจำนวนประชากรในประเทศไทยในขณะนี้ เป็นเซตจำกัด
   ง. เซตของเดือนที่มี 30 วัน เป็นเซตว่าง

7. จากแผนภาพต่อไปนี้ ส่วนที่แรงเงาตรงกับข้อใด



   ก. $A\cap B'$
   ข. $(A\cap B)'$
   ค. $A-B$
   ง. $(A\cup B)'$

8. กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ แล้ว
$A \cap B$ ตรงกับข้อใด
ก. $\{2\}$
ข. $\{1, 2, 3\}$
ค. $\{2, 4, 6\}$
ง. $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

9. พิจารณาข้อความต่อไปนี้
อรุณทดลองชั่งน้ำหนักจากเครื่องชั่ง 3 เครื่อง ผลดังนี้
เครื่องชั่งที่ 1 อรุณหนัก 60.5 กิโลกรัม
เครื่องชั่งที่ 2 อรุณหนัก 59.4 กิโลกรัม
เครื่องชั่งที่ 3 อรุณหนัก 60.2 กิโลกรัม
เขาจึงสรุปว่า เขามีน้ำหนัก 60 กิโลกรัม
จากข้อความข้างต้น อรุณสรุปน้ำหนักของตนเอง เป็นการใช้หลักการให้เหตุผลแบบใด
ก. อัตนัย
ข. อุปนัย
ค. ปรนัย
ง. นิรนัย

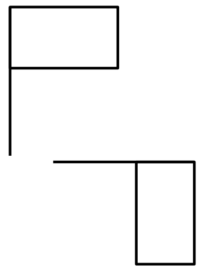
10. กำหนดเหตุ
1. สันติเป็นนักฟุตบอล
2. นักฟุตบอลทุกคนแข็งแรง
ใช้แผนภาพ เวนน์ – ออยเลอร์ เขียนเหตุที่กำหนดได้กี่แบบ
ก. 1
ข. 2
ค. 3
ง. 4

11. จงหาค่าของ $\dfrac{\sin 45^\circ - \cos 30^\circ}{\cos 45^\circ - \sin 60^\circ}$
ก. -1
ข. 0
ค. 1
ง. 2

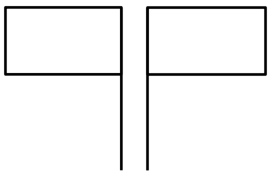
12. นุชยืนห่างจากอาคารแห่งหนึ่ง 100 เมตร เมื่อมองขึ้นไปบนยอดตึก เป็นมุมเงย 60 องศา ตึกหลังนี้สูงประมาณกี่เมตร
ก. $100\sqrt{3}$ เมตร
ข. $50\sqrt{3}$ เมตร
ค. $\dfrac{100}{\sqrt{3}}$ เมตร
ง. $\dfrac{50}{\sqrt{3}}$ เมตร

13. ภาพในข้อใดเป็นการหมุน 90° ตามเข็มนาฬิกา

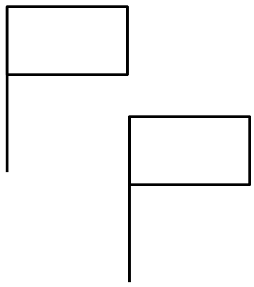
ก.



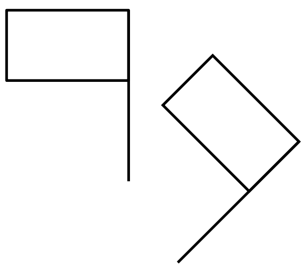
ข.



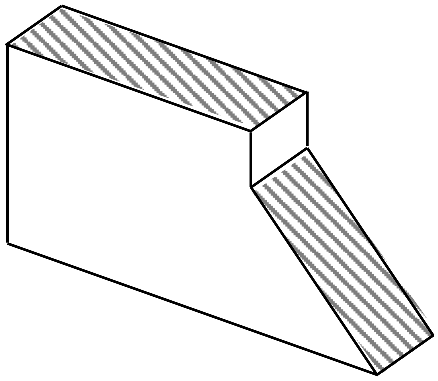
ค.



ง.

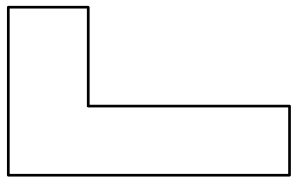


14.

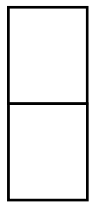


จากรูปเรขาคณิตสามมิติที่กำหนดให้ ภาพใดต่อไปนี้แสดงภาพที่ได้จากการมองด้านบน

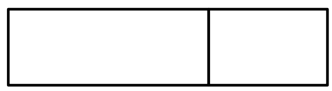
ก.



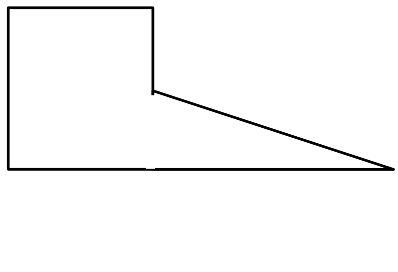
ข.



ค.



ง.



15. กำหนดข้อมูล

คะแนนของนักศึกษา 9 คนดังนี้

15, 9, 12, 13 , 10, 20, 13, 16, 18

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ฐานนิยม และ มัธยฐาน เท่ากับข้อใดตามลำดับ

ก. 14, 13, 13

ข. 13, 13, 14

ค. 14, 13, 14

ง. 13, 14, 13

16. กำหนดตารางแจกแจงความถี่

คะแนน (x_i)	ความถี่ (f)
5	1
6	5
7	10
8	3
9	1

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และฐานนิยมของคะแนน เท่ากับข้อใด ตามลำดับ

ก. 6.9, 9

ข. 6.9, 7

ค. 8, 6.9

ง. 7, 6.9

17. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลขนาดเดียวกัน เป็นสีแดง 2 ลูก เป็นสีขาว 3 ลูก สุ่มหยิบลูกบอล 2 ลูกขึ้นมาพร้อมกัน ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีต่างกันเท่ากับเท่าใด

ก. $\frac{4}{10}$

ข. $\frac{5}{10}$

ค. $\frac{6}{10}$

ง. $\frac{7}{10}$

18. โยนลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าหงาย มีผลบวกเท่ากับ 8 เท่ากับเท่าใด

ก. $\frac{6}{36}$

ข. $\frac{5}{36}$

ค. $\frac{4}{36}$

ง. $\frac{3}{36}$

19. นายสมชายได้รับเงินเดือนๆละ 32,000 บาท สามารถหักค่าใช้จ่ายได้ร้อยละ 40 ของเงินได้พึงประเมิน แต่ไม่เกิน 60,000 บาท หักค่าลดหย่อนผู้มีเงินได้ 30,000 บาท หักค่าลดหย่อนสำหรับภรรยา 30,000 บาท สิ้นปีนายสมชายยื่นแบบแสดงรายการ ภาษีเงินได้บุคคลธรรมดาจะต้องชำระภาษีหรือไม่ ถ้าต้องชำระภาษีเป็นเงินเท่าไร (เงินได้พึงประเมิน 1 – 150,000 บาท ยกเว้นการเสียภาษี 150,000 – 300,000 บาท เสียภาษีในอัตรา 5%)
    ก. ไม่ต้องชำระ
    ข. ชำระเป็นเงิน 3,800 บาท
    ค. ชำระเป็นเงิน 4,200 บาท
    ง. ชำระเป็นเงิน 5,700 บาท

20. นายประสพโชค เป็นตัวแทนขายเครื่องใช้ไฟฟ้า ซึ่งมีราคา 12,500 บาท ให้กับผู้ใช้ไฟฟ้าโดยคิดค่านายหน้า 10% อยากทราบว่า นายประสพโชคจะต้องส่งเงินให้บริษัทเท่าไร
    ก. 1,250
    ข. 11,500
    ค. 11,250
    ง. 12,000

ดูเฉลยแบบทดสอบท้ายเล่ม

บทที่ 1

จำนวนและการดำเนินการ

สาระสำคัญ

1. โครงสร้างของจำนวนจริงประกอบไปด้วย จำนวนตรรกยะ จำนวนอตรรกยะ และจำนวนเต็ม
2. สมบัติของจำนวนจริงที่เกี่ยวกับการบวกและการคูณ ประกอบไปด้วยสมบัติปิด สมบัติการเปลี่ยนหมู่ สมบัติการสลับที่ การมีอินเวอร์ส การมีเอกลักษณ์และสมบัติการแจกแจง
3. การเท่ากันจะใช้เครื่องหมาย " = " แทนการมีค่าเท่ากัน
4. การไม่เท่ากันจะใช้เครื่องหมาย "$\neq, <, >, \leq, \geq$"
5. ค่าสัมบูรณ์ใช้สัญลักษณ์ "| |" โดย

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x > 0 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 0 \\ -x & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. แสดงความสัมพันธ์ของจำนวนต่าง ๆ ในระบบจำนวนจริงได้
2. อธิบายความหมายและหาผลลัพธ์ที่เกิดจากการบวก การลบ การคูณ การหารจำนวนจริงได้
3. อธิบายสมบัติของจำนวนจริงที่เกี่ยวกับการบวก การคูณ การเท่ากัน การไม่เท่ากัน และนำไปใช้ได้
4. อธิบายเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงและหาค่าสมบูรณ์ของจำนวนจริงได้

ขอบข่ายเนื้อหา

เรื่องที่ 1 ความสัมพันธ์ของระบบจำนวนจริง

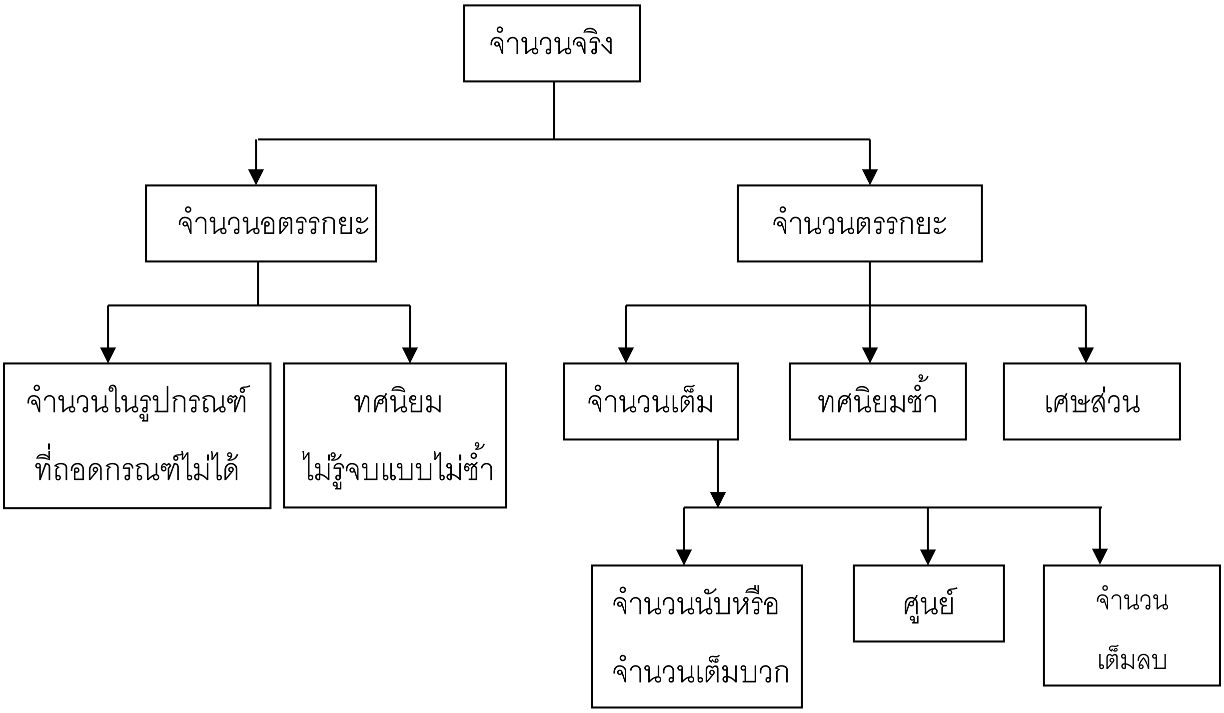
เรื่องที่ 2 สมบัติของการบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนจริง

เรื่องที่ 3 สมบัติการไม่เท่ากัน

เรื่องที่ 4 ค่าสัมบูรณ์

เรื่องที่ 1 ความสัมพันธ์ของระบบจำนวนจริง

1.1. โครงสร้างของจำนวนจริง



จำนวนจริง (Real number) ประกอบด้วยจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ

1. จำนวนตรรกยะ (Rational number) คือ จำนวนที่เขียนในรูปเศษส่วนได้ เมื่อตัวเศษและตัวส่วนเป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ ตัวอย่างของจำนวนตรรกยะ เช่น จำนวนเต็ม ทศนิยมซ้ำ และเศษส่วน

1. จำนวนเต็ม แบ่งเป็น 3 ชนิด คือ
   - 1.1 จำนวนเต็มบวกหรือจำนวนนับ เช่น 1, 2, 3, ...
   - 1.2 ศูนย์ มีจำนวนเดียว คือ 0
   - 1.3 จำนวนเต็มลบ เช่น -1, -2, -3, ...
2. เศษส่วน เช่น $\frac{3}{4}$, $3\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{7}$ เป็นต้น
3. ทศนิยมซ้ำ เช่น $0.\dot{6}$, $0.\dot{1}\dot{2}$, $0.5\dot{2}\dot{3}$

2. จำนวนอตรรกยะ (Irrational Number) คือจำนวนที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ เขียนได้ในรูปทศนิยมไม่ซ้ำ

เช่น $\sqrt{2}$ มีค่าเท่ากับ 1.414213… ดังนั้น $\sqrt{2}$ มีค่าประมาณ 1.414

$\sqrt{3}$ มีค่าเท่ากับ 1.7320508… ดังนั้น $\sqrt{3}$ มีค่าประมาณ 1.732

π มีค่าเท่ากับ 3.14159265… ดังนั้น π มีค่าประมาณ 3.14

0.1010010001… มีค่าประมาณ 1.101

วีดิทัศน์ เรื่อง โครงสร้างของจำนวนจริง

เรื่องที่ 2

สมบัติการบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนจริง

สมบัติของจำนวนจริงที่ใช้ในการบวก การลบ การคูณ และการหาร มีดังนี้

2.1 สมบัติการเท่ากันของจำนวนจริง กำหนด a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ

		ตัวอย่าง
สมบัติการสะท้อน	$a = a$	2 = 2
สมบัติการสมมาตร	ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$	ถ้า 5 = 2 + 3 แล้ว 2 + 3 = 5
สมบัติการถ่ายทอด	ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$	ถ้า $4 = 2^2$ และ $2^2 = 2 \times 2$ แล้ว $4 = 2 \times 2$
สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากันทั้งสองข้าง	ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$	ถ้า 5 = 2 + 3 แล้ว 5 + 4 = (2 + 3) +4
สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากันทั้งสองข้าง	ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$	ถ้า $10 = 5 \times 2$ แล้ว $10 \times 3 = (5 \times 2) \times 3$

2.2 สมบัติการบวกและการคูณในระบบจำนวนจริง เมื่อกำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

2.2.1 สมบัติการบวก

		ตัวอย่าง
สมบัติปิด	ถ้า $a \in R$ และ $b \in R$ แล้ว $a+b \in R$	$2 \in R$ และ $3 \in R$ แล้ว $2 + 3 \in R$
สมบัติการสลับที่	$a+b = b+a$	2 + 3 = 3 + 2
สมบัติการเปลี่ยนหมู่	$a+(b+c) = (a+b)+c$	2 + (3 + 5) = (2 + 3) + 5
สมบัติการมีเอกลักษณ์	เอกลักษณ์การบวก คือ 0 $0+a = a+0 = a$	0 + 2 = 2 + 0 = 2
สมบัติการมีอินเวอร์สการบวก	a มีอินเวอร์สการบวก คือ $-a$ และ $-a$ มีอินเวอร์สการบวก คือ a จะได้ $a+(-a) = (-a)+a = 0$ นั่นคือจำนวนจริง a จะมี $-a$ เป็นอินเวอร์สของการบวก	อินเวอร์สการบวกของ 5 คือ -5 และ อินเวอร์สการบวกของ -5 คือ 5 + (-5) = (-5) + 5 = 0

วีดิทัศน์ เรื่อง สมบัติการเท่ากันของจำนวนจริง

วีดิทัศน์ เรื่อง สมบัติการบวกในระบบจำนวนจริง

2.2.2 สมบัติการคูณ

		ตัวอย่าง
สมบัติปิด	ถ้า $a \in R$ และ $b \in R$ แล้ว $ab \in R$	$2 \in R$ และ $3 \in R$ แล้ว $2(3) \in R$
สมบัติการสลับที่	$ab = ba$	$2(3) = 3(2)$
สมบัติการเปลี่ยนหมู่	$a(bc) = (ab)c$	$2 \times (3 \times 5) = (2 \times 3) \times 5 = 30$
สมบัติการมีเอกลักษณ์	เอกลักษณ์การคูณ คือ 1 $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$	$1 \times 5 = 5 \times 1 = 5$
สมบัติการมีอินเวอร์สการคูณ (ยกเว้น 0 เพราะ $\frac{1}{0}$ ไม่มีความหมาย)	a มีอินเวอร์สการคูณ คือ $\frac{1}{a}$ และ $\frac{1}{a}$ มีอินเวอร์สการคูณ คือ a จะได้ $a\left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right)a = 1$; $a \neq 0$ นั่นคือ จำนวนจริง a จะมี $\frac{1}{a}$ เป็นอินเวอร์สการคูณ อินเวอร์สการคูณของ a เขียนแทนด้วย a^{-1}	5 มีอินเวอร์สการคูณ คือ $\frac{1}{5}$ และ $\frac{1}{5}$ มีอินเวอร์สการคูณ คือ 5 อินเวอร์สการคูณของ 5 คือ $\frac{1}{5}$ หรือ 5^{-1}
สมบัติการแจกแจง	$a(b+c) = ab + ac$ $(b+c)a = ba + ca$	$2(3+5) = 2(3) + 2(5)$ $(3+5)2 = 3(2) + 5(2)$

จากสมบัติของจำนวนจริงสามารถใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้ได้

ทฤษฎีบทที่ 1 กฎการตัดออกสำหรับการบวก	**ตัวอย่าง**
เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $a + c = b + c$ แล้ว $a = b$ ถ้า $a + b = a + c$ แล้ว $b = c$	ถ้า $4 + 3 = 2^2 + 3$ แล้ว $4 = 2^2$ ถ้า $4 + 5 = 4 + (2 + 3)$ แล้ว $5 = 2 + 3$
ทฤษฎีบทที่ 2 กฎการตัดออกสำหรับการคูณ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $ac = bc$ และ $c \neq 0$ แล้ว $a = b$ ถ้า $ab = ac$ และ $a \neq 0$ แล้ว $b = c$	ถ้า $4(3) = 2^2(3)$ แล้ว $4 = 2^2$ ถ้า $4(5) = 4(2 + 3)$ แล้ว $5 = 2 + 3$
ทฤษฎีบทที่ 3 เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ $a \cdot 0 = 0$ $0 \cdot a = 0$	$2 \times 0 = 0$ $0 \times 2 = 0$

ทฤษฎีบทที่ 4 เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ	**<u>ตัวอย่าง</u>**
$(-1)a = -a$ $a(-1) = -a$	$(-1)\ 2 = -2$ $2\ (-1) = 2$
ทฤษฎีบทที่ 5 เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใด ถ้า $ab = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$	
ทฤษฎีบทที่ 6 เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ $a(-b) = -ab$ $(-a)b = -ab$ $(-a)(-b) = ab$	 $2\ (-3) = -2\ (3)$ $(-2)\ 3 = -2\ (3)$ $(-2)\ (-3) = 2\ (3)$

วีดิทัศน์ เรื่อง สมบัติการคูณในระบบจำนวนจริง

การลบและการหารจำนวนจริง

• <u>การลบจำนวนจริง</u> **บทนิยาม** เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ $a - b = a + (-b)$ นั่นคือ $a - b$ คือ ผลบวกของ a กับอินเวอร์สการบวกของ b	**ตัวอย่าง**เช่น $5 – 3 = 5 + (-3)$ นั่นคือ $5 – 3$ คือผลบวกของ 5 กับอินเวอร์ส การบวกของ 3
• <u>การหารจำนวนจริง</u> **บทนิยาม** เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ เมื่อ $b \neq 0$ และ b^{-1} เป็นอินเวอร์สการคูณของ a $\frac{a}{b} = a\,(b^{-1})$ นั่นคือ $\frac{a}{b}$ คือ ผลคูณของ a กับอินเวอร์สการคูณของ b	เช่น $\frac{5}{2} = 5 \times \frac{1}{2} = 5\ (2^{-1})$ นั่นคือ $\frac{5}{2}$ คือผลคูณของ 5 กับอินเวอร์ส การคูณของ 2

วีดิทัศน์ เรื่อง การแก้สมการกำลังหนึ่งตัวแปรเดียว

วีดิทัศน์ เรื่อง การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียว โดยวิธีแยกตัวประกอบ

วีดิทัศน์ เรื่อง การแก้สมการกำลังสอง โดยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

วีดิทัศน์ เรื่อง การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียว โดยวิธีใช้สูตร

เรื่องที่ 3

สมบัติการไม่เท่ากัน

ประโยคคณิตศาสตร์จะใช้สัญลักษณ์ $>, <, \geq, \leq, \neq$ แทนการไม่เท่ากัน

บทนิยาม	$a < b$	หมายถึง	a น้อยกว่า b
	$a > b$	หมายถึง	a มากกว่า b

กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. สมบัติการถ่ายทอด ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$ เช่น $8 > 5$ และ $5 > 3$ แล้ว $8 > 3$
2. สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$ เช่น $5 > 0$ แล้ว $5 + 3 > 0 + 3$
3. จำนวนจริงบวกและจำนวนจริงลบ

   a เป็นจำนวนจริงบวก ก็ต่อเมื่อ $a > 0$ เช่น 2 เป็นจำนวนจริงบวกก็ต่อเมื่อ $2 > 0$

   a เป็นจำนวนจริงลบ ก็ต่อเมื่อ $a < 0$ เช่น -2 เป็นจำนวนจริงลบก็ต่อเมื่อ $-2 < 0$
4. สมบัติการคูณด้วยจำนวนเท่ากันที่ไม่เท่ากับศูนย์

   กรณีที่ 1 ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$ เช่น ถ้า $5 > -3$ แล้ว $5(2) > (-3)(2)$ หรือ $10 > -6$

   กรณีที่ 2 ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$ เช่น ถ้า $5 > -3$ แล้ว $5(-2) < (-3)(-2)$ หรือ $-10 < 6$
5. สมบัติการตัดออกสำหรับการบวก ถ้า $a + c > b + c$ แล้ว $a > b$ เช่น ถ้า $5 + 2 > 3 + 2$ แล้ว $5 > 3$
6. สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ

   กรณีที่ 1 ถ้า $ac > bc$ และ $c > 0$ แล้ว $a > b$ เช่น ถ้า $5(2) > (-3)(2)$ แล้ว $5 > -3$

   กรณีที่ 2 ถ้า $ac > bc$ และ $c < 0$ แล้ว $a < b$ เช่น ถ้า $(-3)(2) > 5(-2)$ แล้ว $-3 < 5$

บทนิยาม

$a \leq b$	หมายถึง	a น้อยกว่าหรือเท่ากับ b
$a \geq b$	หมายถึง	a มากกว่าหรือเท่ากับ b
$a < b < c$	หมายถึง	$a < b$ และ $b < c$
$a \leq b \leq c$	หมายถึง	$a \leq b$ และ $b \leq c$

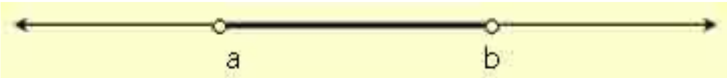
วีดิทัศน์ เรื่อง สมบัติการไม่เท่ากัน

ช่วง (Interval)

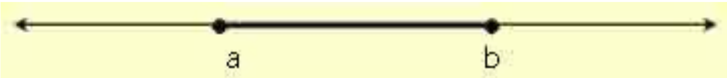
ช่วง หมายถึง การเขียนแทนเซตของจำนวนจริงที่เป็นส่วนใดส่วนหนึ่งบนเส้นจำนวน เช่น การเขียนแทนเซตของจำนวนจริงที่อยู่ระหว่างจำนวนจริง a และ b ใดๆ หรือมากกว่าหรือน้อยกว่าจำนวนจริง a ใดๆ

3.1 ช่วงของจำนวนจริง กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ $a < b$

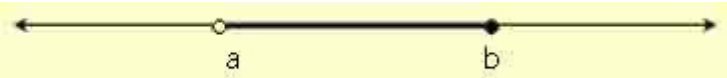
1. ช่วงเปิด (a, b) $(a, b) = \{ x \mid a < x < b \}$



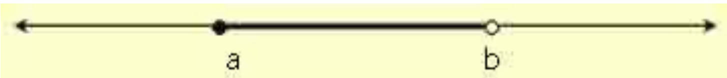
2. ช่วงปิด [a, b] $[a, b] = \{ x \mid a \leq x \leq b \}$



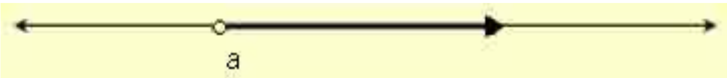
3. ช่วงครึ่งเปิด (a, b] $(a, b] = \{ x \mid a < x \leq b \}$



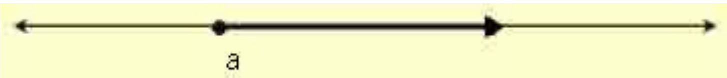
4. ช่วงครึ่งเปิด [a, b) $[a, b) = \{ x \mid a \leq x < b \}$



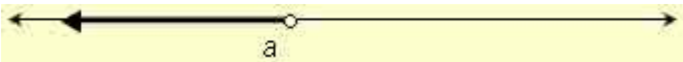
5. ช่วง (a, ∞) $(a, \infty) = \{ x \mid x > a \}$



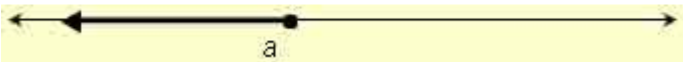
6. ช่วง [a, ∞) $[a, \infty) = \{ x \mid x \geq a \}$



7. ช่วง (-∞, a) $(-\infty, a) = \{ x \mid x < a \}$



8. ช่วง (-∞, a] $(-\infty, a] = \{ x \mid x \leq a \}$



วีดิทัศน์ เรื่อง ช่วง

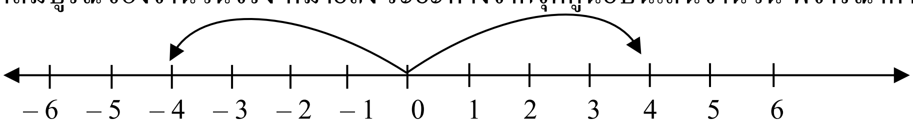
วีดิทัศน์ เรื่อง การแก้อสมการตัวแปรเดียว ดีกรีหนึ่ง

วีดิทัศน์ เรื่อง การแก้อสมการตัวแปรเดียว ดีกรีสอง

เรื่องที่ 4

ค่าสัมบูรณ์

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง หมายถึง ระยะห่างจากจุดศูนย์บนเส้นจำนวน พิจารณาค่าสัมบูรณ์ของ 4 และ – 4



4 อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะทาง 4 หน่วย ดังนั้น ค่าสัมบูรณ์ของ 4 คือ 4

– 4 อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะทาง 4 หน่วย ดังนั้น ค่าสัมบูรณ์ของ – 4 คือ 4

นั่นคือ ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงใด ๆ ต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ

สัญลักษณ์แทนค่าสัมบูรณ์คือ | | เช่น ค่าสัมบูรณ์ของ 4 คือ $|4|$

ค่าสัมบูรณ์ของ – 4 คือ $|-4|$

บทนิยาม กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง

$$|a| = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } a = 0 \\ -a & \text{เมื่อ } a < 0 \end{cases}$$

4.1 สมบัติของค่าสัมบูรณ์

กำหนดให้ x, y เป็นจำนวนจริงใดๆ **ตัวอย่าง**

1.	$\|x\| = \|-x\|$	$\|3\| = \|-3\| = 3$
2.	$\|xy\| = \|x\|\|y\|$	$\|3(-2)\| = \|3\|\|-2\| = 6$
3.	$\left\|\frac{x}{y}\right\| = \frac{\|x\|}{\|y\|}$; $y \neq 0$	$\left\|\frac{10}{-5}\right\| = \frac{\|10\|}{\|-5\|} = 2$
4.	$\|x - y\| = \|y - x\|$	$\|10 - 3\| = \|3 - 10\| = 7$
5.	$\|x\|^2 = x^2$	$\|5\|^2 = 5^2 = 25$
6.	$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ 6.1 ถ้า $xy > 0$ แล้ว $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ 6.2 ถ้า $xy < 0$ แล้ว $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$	 เช่น $x = 2$ $y = 3$ แล้ว $\|2 + 3\| = \|2\| + \|3\| = 5$ เช่น $x = 2$ $y = -3$ แล้ว $\|2 + (-3)\| < \|2\| + \|-3\|$ $1 < 5$
7.	เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก $\|x\| < a$ หมายถึง $-a < x < a$ $\|x\| \leq a$ หมายถึง $-a \leq x \leq a$	 $\|x\| < 3$ หมายถึง $-3 < x < 3$ $\|x\| \leq 3$ หมายถึง $-3 \leq x \leq 3$
8.	เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก $\|x\| > a$ หมายถึง $x < -a$ หรือ $x > a$ $\|x\| \geq a$ หมายถึง $x \leq -a$ หรือ $x \geq a$	 $\|x\| > 3$ หมายถึง $x < -3$ หรือ $x > 3$ $\|x\| \geq 3$ หมายถึง $x \leq -3$ หรือ $x \geq 3$

วีดิทัศน์ เรื่อง ค่าสัมบูรณ์

วีดิทัศน์ เรื่อง ค่าสัมบูรณ์และการนำไปใช้ (การแก้สมการ)

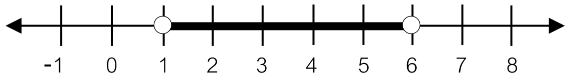
วีดิทัศน์ เรื่อง ค่าสัมบูรณ์และการนำไปใช้ (การแก้อสมการ)

กิจกรรมบทที่ 1

แบบฝึกหัดที่ 1

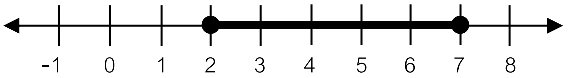
จงเขียนแสดงช่วงต่างๆ ที่แสดงบนเส้นจำนวนต่อไปนี้

1)



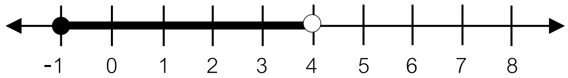
ตอบ

2)



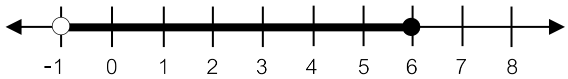
ตอบ

3)



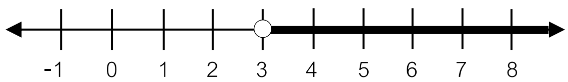
ตอบ

4)



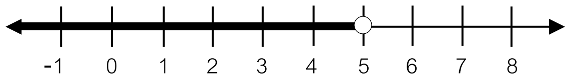
ตอบ

5)



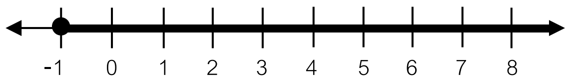
ตอบ

6)



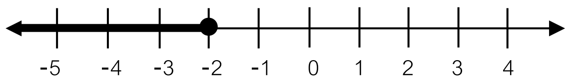
ตอบ

7)



ตอบ

8)



ตอบ

ดูเฉลยกิจกรรมท้ายเล่ม

บทที่ 2

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

สาระสำคัญ

1. a^n อ่านว่า a ยกกำลัง n โดยมี a เป็นฐาน และ n เป็นเลขชี้กำลัง
2. $\sqrt[n]{a}$ อ่านว่า กรณฑ์ที่ n ของ a
3. จำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะจะมีความสัมพันธ์กับจำนวนจริงที่อยู่ในรูปของกรณฑ์หรือ ราก (root) ตามความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้
   $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ และ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
4. การบวก ลบ คูณ หาร จำนวนที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะโดยใช้บทนิยามการบวก ลบ คูณ หาร เลขยกกำลังของจำนวนเต็ม

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. อธิบายความหมายและบอกความแตกต่างของจำนวนตรรกยะและอตรรกยะได้
2. อธิบายเกี่ยวกับจำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ และจำนวนจริงในรูปกรณฑ์ได้
3. อธิบายความหมายและหาผลลัพธ์ที่เกิดจากการบวก การลบ การคูณ การหาร จำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ และจำนวนจริงในรูปกรณฑ์ได้

ขอบข่ายเนื้อหา

เรื่องที่ 1 จำนวนตรรกยะและอตรรกยะ

เรื่องที่ 2 จำนวนจริงในรูปกรณฑ์

เรื่องที่ 3 การบวก การลบ การคูณ การหาร จำนวนที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะและจำนวนจริงในรูปกรณฑ์

เรื่องที่ 1

จำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะ

1.1 จำนวนตรรกยะ หมายถึง จำนวนที่เขียนแทนในรูปเศษส่วน $\frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ที่ $b \neq 0$

จำนวนตรรกยะประกอบด้วย

1) จำนวนเต็ม เช่น 5, 0, -2, -1
2) เศษส่วน เช่น $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{-2}{7}$
3) ทศนิยมไม่รู้จบแบบซ้ำ เช่น $0.1\dot{3}$, 0.666...

1.2 จำนวนอตรรกยะ หมายถึง จำนวนที่ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วน $\frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ที่ $b \neq 0$

จำนวนอตรรกยะ ประกอบด้วย

1) ทศนิยมไม่รู้จบแบบไม่ซ้ำ เช่น 1.23546..., 3.01001000100001...
2) สัญลักษณ์ π, e (π มีค่าประมาณ 3.14285...)
3) จำนวนในรูปกรณ์ที่ถอดกรณ์ไม่ได้ เช่น $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$, ...

1.3 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม

บทนิยาม	เมื่อ a เป็นจำนวนใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก $$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n\text{ ตัว}}$$

เรียก a^n ว่าเลขยกกำลัง ที่มี a เป็น ฐาน และ n เป็นเลขชี้กำลัง

เช่น $5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

กฎของเลขยกกำลัง

ถ้า a,b เป็นจำนวนจริงโดยที่ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

กฎข้อที่ 1 $a^m \cdot b^n = a^{m+n}$ เช่น $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4}$

กฎข้อที่ 2 เมื่อ $a \neq 0$

$$\frac{a^m}{a^n} = 1 \quad \text{ถ้า } m = n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{ถ้า } m > n \qquad \text{เช่น } \frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \quad \text{ถ้า } n > m \qquad \text{เช่น } \frac{3^2}{3^5} = \frac{1}{3^{5-2}}$$

กฎข้อที่ 3 $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$ เช่น $(5^2)^3 = 5^{2 \times 3}$

กฎข้อที่ 4 $(ab)^n = a^n b^n$ เช่น $(2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$

กฎข้อที่ 5 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ เมื่อ $b \neq 0$ เช่น $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5}$

บทนิยาม เมื่อ a เป็นจำนวนจริง ที่ไม่เท่ากับศูนย์ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

$$a^0 = 1 \quad \text{เมื่อ } a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{เมื่อ } a \neq 0$$

วีดิทัศน์ เรื่อง จำนวนตรรกยะ และ อตรรกยะ

เรื่องที่ 2

จำนวนจริงในรูปกรณฑ์

การเขียนเลขยกกำลังเมื่อเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะสามารถทำได้โดยอาศัยความรู้เรื่อง รากที่ n ของจำนวนจริง a และจำนวนจริงในรูปกรณฑ์ (กรณีที่ n ของ a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt[n]{a}$) และมีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม	ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง
	a เป็นรากที่ n ของ b ก็ต่อเมื่อ $a^n = b$

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

เนื่องจาก $2^3 = 8$ ดังนั้น 2 เป็นรากที่ 3 ของ 8

เนื่องจาก $(-2)^5 = -32$ ดังนั้น -2 เป็นรากที่ 5 ของ -32

เนื่องจาก $3^2 = 9$ และ $(-3)^2 = 9$ ดังนั้น 3 และ -3 เป็นรากที่ 2 ของ 9

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ 1) $\sqrt[4]{16}$, 2) $\sqrt[3]{-27}$

วิธีทำ 1) $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2\times 2\times 2\times 2} = 2$

(หรือพิจารณา $16 = 2^4$ ดังนั้น $\sqrt[4]{16} = 2$)

2) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)\times(-3)\times(-3)} = -3$

(หรือพิจารณา $(-3)^3 = -27$ ดังนั้น $\sqrt[3]{-27} = -3$)

สมบัติของรากที่ n ของจำนวนจริง

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริงที่มีรากที่ n

1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ เมื่อ $\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนจริง เช่น $(\sqrt{3})^2 = 3$

2) $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \geq 0 \\ a & \text{เมื่อ } a < 0 \text{ และ n เป็นจำนวนคี่} \\ a & \text{เมื่อ } a < 0 \text{ และ n เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$

เช่น $\sqrt{4^2} = 4$, $\sqrt[3]{5^3} = 5$

เช่น $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

เช่น $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

3) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}$ เช่น $\sqrt{12} = \sqrt{4\,.\,3} = \sqrt{4}\,\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$\sqrt[3]{-40} = \sqrt[3]{(-8)(5)} = \sqrt[3]{-8}\,\sqrt[3]{5}$

$= -2\,\sqrt[3]{5}$

4) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$ เช่น $\sqrt[3]{\dfrac{2}{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{3}$

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $\sqrt{200}$ 2) $\sqrt{18}$ 3) $\sqrt[3]{24}$ 4) $\sqrt{2}\,\sqrt{6}$ 5) $\sqrt[3]{16}\,\sqrt[3]{81}$

วิธีทำ

1) $\sqrt{200} = \sqrt{100\cdot 2} = \sqrt{100}\,\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

2) $\sqrt{18} = \sqrt{9\cdot 2} = \sqrt{9}\,\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

3) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8.3} = \sqrt[3]{8}\,\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$

4) $\sqrt{2}\,\sqrt{6} = \sqrt{2\cdot 6} = \sqrt{2\cdot 2\cdot 3} = 2\sqrt{3}$

5) $\sqrt[3]{16}\,\sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{16\cdot 81} = \sqrt[3]{2^4\cdot 3^4} = 6\sqrt[3]{6}$

วีดิทัศน์ เรื่อง สมบัติรากที่ n ของจำนวนจริง (สมบัติข้อที่ 1)

วีดิทัศน์ เรื่อง สมบัติรากที่ n ของจำนวนจริง (สมบัติข้อที่ 2)

เรื่องที่ 3

การบวก การลบ การคูณ การหาร
จำนวนที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะและจำนวนจริงในรูปกรณฑ์

3.1 การบวก และการลบจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์

สมบัติของการบวกจำนวนจริง ข้อหนึ่งที่สำคัญและมีการใช้มาก คือ สมบัติการแจกแจงในการบวก พจน์คล้าย ดังตัวอย่าง

1) $\underbrace{3x + 5x = (3 + 5)x}_{\text{สมบัติของการแจกแจง}} = 8x$

2) $\underbrace{6a - 2a = (6 - 2)a}_{\text{สมบัติของการแจกแจง}} = 4a$

ด้วยวิธีการเช่นนี้เราสามารถใช้สมบัติการแจกแจงในเรื่องการบวก การลบ ของจำนวนที่อยู่ในเครื่องหมายกรณฑ์อันดับเดียวกัน ที่เรียกว่า "พจน์คล้าย"

ดังนั้น $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = (3 \times \sqrt{2}) + \underbrace{(5 \times \sqrt{2}) = (3 + 5)\sqrt{2}}_{\text{สมบัติการแจกแจง}} = 8\sqrt{2}$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{3}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}
\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{3} &= \sqrt{4 \times 3} + \sqrt{9 \times 3} - \sqrt{3} \\
&= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{3} \\
&= (2 + 3 - 1)\sqrt{3} \\
&= 4\sqrt{3}
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{125}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}
\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{125} &= \sqrt{4}\sqrt{5} + \sqrt{9}\sqrt{5} - \sqrt{25}\sqrt{5} \\
&= 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 5\sqrt{5} \\
&= (2 + 3 - 5)\sqrt{5} \\
&= 0\sqrt{5} \\
&= 0
\end{aligned}$$

วีดิทัศน์ เรื่อง การบวก ลบจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์

3.2 การคูณ และการหารจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์

<u>การคูณ</u> จากสมบัติข้อที่ 3 ของรากที่ n ที่กล่าวว่า

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \, . \sqrt[n]{b}$ เมื่อ $\sqrt[n]{a}$ และ $\sqrt[n]{b}$ เป็นจำนวนจริง

$\therefore \quad \sqrt[n]{a} \, . \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

$\sqrt{2} \, . \sqrt{2} = \sqrt{2 \times 2} = \sqrt{2^2} = 2$

$\sqrt{3} . \sqrt{5} = \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{15}$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณและตอบในรูปอย่างง่าย

1) $\left(2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{5}\right) = \left(2 \cdot \sqrt{3}\right)\left(3 \cdot \sqrt{5}\right)$
$= (2 \times 3) \times (\sqrt{3} \times \sqrt{5})$
$= 6\sqrt{15}$

2) $(3\sqrt{8})(5\sqrt{2}) = 3 \cdot \sqrt{8} \cdot 5 \cdot \sqrt{2}$
$= (3 \times 5)(\sqrt{8} \times \sqrt{2})$
$= 15\sqrt{16}$
$= 15 \cdot 4$
$= 60$

3) $\left(2\sqrt[3]{6}\right)\left(5\sqrt[3]{4}\right) = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{4}$
$= (2 \times 5) \times (\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{4})$
$= 10 \times \sqrt[3]{24}$
$= 10 \times \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{3}$
$= 10 \times \sqrt[3]{3}$
$= 20\sqrt[3]{3}$

4) $3\sqrt{2}\left(4\sqrt{3} + 5\sqrt{6}\right) = \left(3\sqrt{2}\right)\left(4\sqrt{3}\right) + \left(3\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{6}\right)$
$= 12\sqrt{6} + 15\sqrt{12}$
$= 12\sqrt{6} + 15\sqrt{4}\sqrt{3}$
$= 12\sqrt{6} + 30\sqrt{3}$

<u>การหาร</u>

วิธีที่ 1 ใช้สมบัติข้อ 4 $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ เมื่อ $b \neq 0$

เช่น $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2$

วิธีที่ 2 ใช้สมบัติข้อ 3 $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

เช่น $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{4}}{\sqrt{5}} = \sqrt{4} = 2$

วีดิทัศน์ เรื่อง การหารจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์

วิธีที่ 3 ใช้สมบัติการคูณตัวเศษและการคูณตัวส่วนด้วยจำนวนเดียวกัน

เช่น $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{100}}{5} = \dfrac{10}{5} = 2$

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนเศษส่วนต่อไปนี้ โดยให้ตัวส่วนไม่อยู่ในรูปกรณฑ์

1) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{32}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{8}$

2) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{27}} = \dfrac{\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนเศษส่วน $\dfrac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ โดยให้ตัวส่วนไม่อยู่ในรูปกรณฑ์

วิธีทำ $\dfrac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \dfrac{4\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{5-2} = \dfrac{4\sqrt{5}-4\sqrt{2}}{3}$

NOTE : ตัวอย่างที่ 2 อาศัยการแยกตัวประกอบที่เรียกว่า ผลต่างกำลังสอง

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(\sqrt{5}\underbrace{+\sqrt{3})(\sqrt{5}-}_{\text{เครื่องหมายต่างกัน}}\sqrt{3}) = \left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 5 - 3 = 2$

วีดิทัศน์ เรื่อง การคูณ หารจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์

วีดิทัศน์ เรื่อง การหาค่าจำนวนจริงในรูปกรณฑ์

3.3 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

บทนิยาม เมื่อ a เป็นจำนวนจริง n เป็น จำนวนเต็มที่มากกว่า 1 และ a มีรากที่ n จะได้ว่า

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

พิจารณาต่อไปนี้

1) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ และ $(5^{\frac{1}{2}})^2 = 5$

2) $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ และ $(2^{\frac{1}{3}})^3 = 2$

บทนิยาม ให้ a เป็นจำนวนจริง m และ n เป็นจำนวนเต็มที่ $n > 1$ และ $\frac{m}{n}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

จะได้ว่า

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของจำนวนต่อไปนี้

1) $8^{\frac{2}{3}} = [8^{\frac{1}{3}}]^2 = [\sqrt[3]{8}]^2 = (2)^2 = 4$

2) $27^{\frac{4}{3}} = [27^{\frac{1}{3}}]^4 = [\sqrt[3]{27}]^4 = (3)^4 = 81$

3) $125^{\frac{2}{3}} = [125^{\frac{1}{3}}]^2 = [\sqrt[3]{125}]^2 = (5)^2 = 25$

4) $4^{\frac{3}{2}} = [4^{\frac{1}{2}}]^3 = [\sqrt{4}]^3 = (2)^3 = 8$

5) $25^{\frac{4}{3}} = [25^4]^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{25^4} = 25\sqrt[3]{25}$

วีดิทัศน์ เรื่อง การบวก ลบ คูณ และหารเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

กิจกรรมบทที่ 2

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงหาว่าจำนวนที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จำนวนใดเป็นจำนวนตรรกยะ หรือจำนวนอตรรกยะ

1) -4
2) 8
3) 0.666...
4) π
5) -4.9
6) $-\frac{5}{2}$
7) $\sqrt{2}$
8) 2.020020002…
9) 0
10) (3 - 3) π

2. จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม

1) $2a^3 \times 4a^5$
2) $\frac{6b^6}{3b^{-1}}$
3) $(5a^2)^6$
4) $(2ab^{-1})(ab^2)^{-2}$
5) $\left(\frac{x}{y}\right)^3 \left(y^2x\right)^4$
6) $\frac{2^{-3}\,3^{-5}}{3^{-5}\,2^0}$
7) $\frac{3^0 \times 3^{-4} \times 3^{10}}{(-3)^8}$
8) $(32)^4 \cdot 4^{-9}$

แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงหาค่าของจำนวนจริงต่อไปนี้

1) $\sqrt{16}$
2) $\sqrt[3]{27}$
3) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$
4) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}}$
5) $\sqrt[3]{8^2}$
6) $\sqrt[4]{16}$
7) $\sqrt[3]{125}$
8) $\sqrt[3]{-8}$

2. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย โดยใช้สมบัติของ รากที่ n

1) $\sqrt{\frac{36}{25}}$
2) $\sqrt[3]{\frac{-8}{27}}$
3) $\sqrt{\frac{4}{49}}$
4) $\sqrt[3]{\frac{24}{27}}$

แบบฝึกหัดที่ 3

1. จงทำจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}$ 2) $4\sqrt{5}+6\sqrt{5}$ 3) $3\sqrt[3]{7}+5\sqrt[3]{7}$ 4) $3\sqrt{8}-\sqrt{32}$

5) $\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{2}$ 6) $\sqrt{20}+\sqrt{45}+\sqrt{80}$ 7) $\sqrt{12}+\sqrt{27}-4\sqrt{3}$ 8) $5\sqrt[3]{54}-2\sqrt[3]{16}$

2. จงหาผลคูณของแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{12}$ 2) $\left(4\sqrt{2}\right)\left(-6\sqrt{5}\right)$ 3) $\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ 4) $\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)$

3. จงทำให้ส่วนของจำนวนต่อไปนี้ ไม่ติดอยู่ในรูปกรณฑ์

1) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ 2) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{32}}$ 3) $\dfrac{\sqrt{27}+\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ 4) $\dfrac{3}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

ดูเฉลยกิจกรรมท้ายเล่ม

บทที่ 3

เซต

สาระสำคัญ

1. เซต หมายถึง กลุ่ม คน สัตว์ สิ่งของ ที่รวมกันเป็นกลุ่ม โดยมีสมบัติบางอย่างร่วมกัน และบรรดาสิ่งทั้งหลายที่อยู่ในเซตเรียกว่า " สมาชิก" ในการศึกษาเรื่องเซตจะประกอบไปด้วยความหมายของเซต ชนิดของเซต สับเซต และ เอกภพสัมพัทธ์
2. การดำเนินการของเซต คือ การนำเซตต่าง ๆ มากระทำร่วมกันเพื่อให้เกิดเป็นเซตใหม่ ซึ่งทำได้ 4 วิธีคือ ยูเนี่ยน อินเตอร์เซคชั่น ผลต่างระหว่างเซต และคอมพลีเมนต์
3. แผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์ จะช่วยให้การพิจารณาเกี่ยวกับเซตได้ง่ายขึ้นโดยใช้หลักการคือ
   3.1 ใช้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแทนเอกภพสัมพัทธ์ "U"
   3.2 ใช้วงกลมหรือวงรีแทนเซตต่าง ๆ ที่เป็นสมาชิกของ "U" และเขียนภายในสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. อธิบายความหมายเกี่ยวกับเซตได้
2. สามารถหายูเนี่ยน อินเตอร์เซกชั่น ผลต่างของเซต และคอมพลีเมนต์ ได้
3. เขียนแผนภาพแทนเซตและนำไปใช้แก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาสมาชิกของเซตได้

ขอบข่ายเนื้อหา

เรื่องที่ 1 เซต

เรื่องที่ 2 การดำเนินการของเซต

เรื่องที่ 3 แผนภาพเวนน์ - ออยเลอร์และการแก้ปัญหา

เรื่องที่ 1

เซต (Sets)

1.1 ความหมายของเซต

เซต หมายถึง กลุ่มสิ่งของต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็น คน สัตว์ สิ่งของหรือนิพจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งระบุสมาชิกในกลุ่มได้ เช่น

1) เซตของเดือนในหนึ่งปี
2) เซตของพยัญชนะในคำว่า "คุณธรรม"
3) เซตของจำนวนเต็ม

และเรียกสิ่งต่าง ๆ ที่อยู่ในเซตว่า "สมาชิก" (Element) ของเซตนั้น เช่น

1) เดือนมีนาคมเป็นสมาชิกเซตของเดือนในหนึ่งปี
2) "ร" เป็นสมาชิกเซตของพยัญชนะในคำว่า "คุณธรรม"
3) 5 เป็นสมาชิกเซตของจำนวนเต็ม

วีดิทัศน์ เรื่อง ความหมายของเซต และการเขียนชื่อเซต

1.2 วิธีการเขียนเซต

การเขียนเซตเขียนได้ 2 แบบ

1. แบบแจกแจงสมาชิกของเซต โดยเขียนสมาชิกทุกตัวของเซตลงในเครื่องหมายวงเล็บปีกกาและใช้เครื่องหมายจุลภาค (,) คั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัวนั้น

ตัวอย่าง $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{ a, e, i, o, u\}$

C = {มกราคม, กุมภาพันธ์, ..., ธันวาคม}

2. แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกในเซต โดยใช้ตัวแปรแทนสมาชิกของเซต และบอกสมบัติของสมาชิกในรูปของตัวแปร

ตัวอย่าง A = { x | x เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 5}

B = { x | x เป็นสระในภาษาอังกฤษ}

C = {x | x เป็นชื่อเดือนในหนึ่งปี}

สัญลักษณ์ | แทนคำว่า "ซึ่ง"

วีดิทัศน์ เรื่อง ความหมายของเซต และการเขียนชื่อเซต

การเขียนชื่อเซต

โดยทั่ว ๆ ไป การเขียนชื่อเซตหรือการเรียกชื่อของเซตจะใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ได้แก่ A , B , C , . . . , Y , Z ทั้งนี้เพื่อความสะดวกในการอ้างอิงเมื่อเขียนหรือกล่าวถึงเซตนั้น ๆ ต่อไป สำหรับสมาชิกในเซตจะเขียนโดยใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก ได้แก่ a, b, c, …, y, z

สัญลักษณ์ $\in$ (Epsilon) แทนความหมายว่า “อยู่ใน” หรือ “ เป็นสมาชิกของ”

เช่น $A = \{2 , 3 , 4 , 8 , 10\}$

2 เป็นสมาชิกของ A เขียนแทนด้วย $2 \in A$

10 เป็นสมาชิกของ A เขียนแทนด้วย $10 \in A$

ใช้สัญลักษณ์ $\notin$ แทนความหมาย “ไม่อยู่ หรือ “ไม่เป็นสมาชิกของ” เช่น

5 ไม่เป็นสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $5 \notin A$

7 ไม่เป็นสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $7 \notin A$

<u>ข้อสังเกต</u>

1. การเรียงลำดับของแต่ละสมาชิกไม่ถือเป็นสิ่งสำคัญ

   เช่น $A = \{ a , b , c \}$

   $B = \{ b , c , a \}$

   ถือว่าเซต A และเซต B เป็นเซตเดียวกัน
2. การนับจำนวนสมาชิกของเซต จำนวนสมาชิกที่เหมือนกันจะนับเพียงครั้งเดียว ถึงแม้จะเขียนซ้ำ ๆ กัน หลาย ๆ ครั้ง

   เช่น $A = \{ 0 , 1 , 2 , 1 , 3 \}$ มีจำนวนสมาชิก 4 ตัว คือ 0 , 1 , 2 , 3 เป็นต้น

1.3 ชนิดของเซต

1.3.1 เซตว่าง (Empty Set or Null Set) คือ เซตที่ไม่มีสมาชิก ใช้สัญลักษณ์ ϕ (อ่านว่า phi) หรือ { } แทนเซตว่าง

ตัวอย่าง $A = \{ x \mid x$ เป็นชื่อทะเลทรายในประเทศไทย $\}$

ดังนั้น A เป็นเซตว่าง เนื่องจากประเทศไทยไม่มีทะเลทราย

หรือ $A = \phi$ หรือ $A = \{ \}$

<u>ข้อสังเกต</u> 1. เซตว่างมีจำนวนสมาชิก เท่ากับศูนย์ (ไม่มีสมาชิกเลย)

2. $0 \neq \varnothing$

3. $\{ 0 \}$ ไม่เป็นเซตว่าง เพราะมีจำนวนสมาชิก 1 ตัว

1.3.2 เซตจำกัด (Finite Set) คือ เซตที่สามารถระบุจำนวนสมาชิกในเซตได้

จำนวนสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย n(A)

ตัวอย่าง $A = \{1, 2, \{3\}\}$ มีจำนวนสมาชิก 3 ตัว คือ 1, 2 และ {3} หรือ $n(A) = 3$

$B = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มและ $1 \le x \le 10\}$ มีจำนวนสมาชิก 10 ตัว คือ 1, 2, 3, …, 10 หรือ $n(B) = 10$

$C = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 0 กับ 1$\}$ ดังนั้น C เป็นเซตว่าง มีจำนวนสมาชิก 0 ตัว หรือ $n(C) = 0$

$D = \{x \mid x$ เป็นชื่อวันในหนึ่งสัปดาห์$\}$ มีจำนวนสมาชิก 7 ตัว หรือ $n(E) = 7$

1.3.3 เซตอนันต์ (Infinite Set) คือ เซตที่มีจำนวนสมาชิกไม่จำกัด

นั่นคือไม่สามารถบอกจำนวนสมาชิกได้

ตัวอย่าง $A = \{-1, -2, -3, \ldots\}$

$B = \{x \mid x = 2n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ$\}$

$C = \{x \mid x$ เป็นจำนวนจริง$\}$

$T = \{x \mid x$ เป็นจำนวนนับ$\}$

ตัวอย่าง ให้บอกว่าเซตต่อไปนี้ เซตใดเป็นเซตว่าง เซตจำกัดหรือเซตอนันต์

เซต	**เซตว่าง**	**เซตจำกัด**	**เซตอนันต์**
1. เซตของผู้ที่เรียนการศึกษานอกโรงเรียน ปีการศึกษา 2552		/	
2. เซตของจำนวนเต็มบวกคี่			/
3. เซตของสระในภาษาไทย		/	
4. เซตของจำนวนเต็มที่หารด้วย 10 ลงตัว			/
5. เซตของทะเลทรายในประเทศไทย	/	/	

วีดิทัศน์ เรื่อง ชนิดของเซต

1.3.4 เซตที่เท่ากัน (Equal Set) เซตสองเซตจะเท่ากันก็ต่อเมื่อทั้งสองเซตมีสมาชิกอย่างเดียวกัน และจำนวนเท่ากัน เซต A เท่ากับเซต B เขียนแทน

ด้วย **A = B**

A = B หมายความว่า สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกทุกตัวของเซต B และสมาชิกทุกตัวของเซต B เป็นสมาชิกทุกตัวของเซต A

ถ้าสมาชิกตัวใดตัวหนึ่งของเซต A ไม่เป็นสมาชิกของเซต B หรือสมาชิกตัวใดตัวหนึ่งของเซต B ไม่เป็นสมาชิกของเซต A แสดงว่า เซต A ไม่เท่ากับเซต B

เซต A ไม่เท่ากับเซต B เขียนแทนด้วย $A \neq B$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $A = \{2, 4, 6, 8\}$

$B = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ที่น้อยกว่า $10\}$

วิธีทำ $A = \{2, 4, 6, 8\}$

พิจารณา B เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ที่น้อยกว่า 10

จะได้ $B = \{2, 4, 6, 8\}$

ดังนั้น $A = B$

ตัวอย่างที่ 2 $A = \{0, \{1,2\}\}$

$B = \{0, 1, 2\}$

ดังนั้น $A \neq B$

เพราะ A มีสมาชิก 2 ตัวคือ 0 และ $\{1, 2\}$

B มีสมาชิก 3 ตัวคือ 0, 1 และ 2

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{5, 2, 3, 5\}$ และ

$C = \{x \mid x^2 - 8x + 15 = 0\}$

วิธีทำ พิจารณา $x^2 - 8x + 15 = 0$

$(x - 3)(x - 5) = 0$

$x = 3, 5$

$C = \{3, 5\}$

ดังนั้น $A = B$ เพราะ A และ B มีสมาชิก 3 ตัวคือ 2, 3, 5 เหมือนกัน

แต่ $A \neq C$ เพราะ $2 \in A$ แต่ $2 \notin C$

$B \neq C$ เพราะ $2 \in B$ แต่ $2 \notin C$

1.4 สับเซต

เซต A เป็นสับเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B

ใช้สัญลักษณ์ $\subset$ แทนคำว่า “เป็นสับเซตของ”

ใช้สัญลักษณ์ $\not\subset$ แทนคำว่า “ไม่เป็นสับเซตของ”

ตัวอย่าง $A = \{0, 1, 5\}$

$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \subset B$ เพราะสมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B

$B \not\subset A$ เพราะสมาชิกทุกตัวของเซต B ไม่เป็นสมาชิกของเซต A

<u>ข้อสังเกต</u>

1. เซตทุกเซตเป็นสับเซตของตัวมันเอง นั่นคือถ้าเซต A เป็นเซตใดๆแล้ว $A \subset A$
2. เซตว่างเป็นสับเซตของทุกเซต นั่นคือถ้าเซต A เป็นเซตใดๆแล้ว $\{\} \subset A$

วีดิทัศน์ เรื่อง การเท่ากันของเซต และการเทียบเท่ากันของเซต

1.5 เอกภพสัมพันธ์ คือ เซตที่กำหนดขึ้นโดยมีข้อตกลงกันว่าจะไม่กล่าวถึง สิ่งอื่นใดนอกเหนือไปจากสมาชิกของเซตที่กำหนด ใช้สัญลักษณ์ U แทน เอกภพสัมพัทธ์

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ U เป็นเซตของจำนวนจริง

และ $A = \{x \mid x^2 = 4\}$ จงเขียนเซต A แบบแจกแจงสมาชิก

ตอบ $A = \{2, -2\}$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ U เป็นเซตของจำนวนนับ

และ $A \ \{x \mid x^2 = 4\}$ จงเขียนเซต A แบบแจกแจงสมาชิก

ตอบ $A = \{2\}$

<u>ข้อสังเกต</u> ถ้าไม่มีการกำหนดเอกภพสัมพัทธ์ ให้ถือว่าเอกภพสัมพัทธ์นั้นเป็นเซตของจำนวนจริง

วีดิทัศน์ เรื่อง การเท่ากันของเซต และการเทียบเท่ากันของเซต

เรื่องที่ 2

การดำเนินการของเซต

2.1 การยูเนียนของเซต ใช้สัญลักษณ์ “$\cup$”

$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$ อ่านว่า A ยูเนี่ยน B เท่ากับเซตของ x ซึ่ง x อยู่ใน A หรือ x อยู่ใน B

สัญลักษณ์ $\vee$ แทนคำว่า “หรือ”

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า $A = \{0 , 1 , 2 , 3\}$ และ $B = \{1$

จะได้ $A \cup B = \{0 , 1 , 2 , 3 , 5 ,$

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า $W = \{a , s , d , f\}$ และ $Z = \{p , k , b\}$

จะได้ $W \cup Z = \{a , s , d , f , p , k , b\}$

ตัวอย่างที่ 3 ถ้า $M = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวก$\}$ และ $L = \{1 , 2 , 3 , 4\}$

จะได้ $M \cup L = M$

2.2 การอินเตอร์เซคชัน ใช้สัญลักษณ์ “$\cap$”

$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$ อ่านว่า A อินเตอร์เซค B เท่ากับเซตของ x ซึ่ง x อยู่ใน A และ x อยู่ใน B

สัญลักษณ์ $\wedge$ หมายถึง “และ”

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า $A = \{0 , 1 , 2 , 3\}$ และ $B = \{1 , 3 , 5$

จะได้ $A \cap B = \{1 , 3\}$

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า $W = \{a , s , d , f\}$ และ $Z = \{p , k , b\}$

จะได้ $W \cap Z = \{ \}$

ตัวอย่างที่ 3 ถ้า $M = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวก$\}$ และ $L = \{1 , 2 , 3 , 4\}$

จะได้ $M \cap L = L$

วีดิทัศน์ เรื่อง การยูเนียนของเซต

วีดิทัศน์ เรื่อง การอินเตอร์เซคชันของเซต

2.3 คอมพลีเม้นต์ของเซต ใช้สัญลักษณ์ “ $'$ ”

ถ้า U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ คอมพลีเมนต์ของ A คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน U แต่ไม่อยู่ใน A เขียน A' แทนคอมพลีเม้นท์ของเซต A

ดังนั้น $A' = \{ x \mid x \notin A \}$

ตัวอย่าง 1. ถ้า U = {0, 1, 2, 3, 4, 5} และ A = {0 ,2}

จะได้ A' = {1, 3,4, 5}

ตัวอย่าง 2. ถ้า U = {1, 2, 3, ... } และ C = { x|x เป็นจำนวนคู่}

จะได้ C' = { x |x $\in$ U และ x เป็นจำนวนคี่ }

วีดิทัศน์ เรื่อง คอมพลีเมนต์ของเซต

2.4 ผลต่างของเซต ใช้สัญลักษณ์ “ – ”

ผลต่างระหว่างเซต A และเซต B คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของเซต A ซึ่งไม่เป็นสมาชิกของเซต B ผลต่างระหว่างเซต A และ B เขียนแทนด้วย A – B

ดังนั้น $A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$

จะเห็นว่า A - B ≠ B - A

ตัวอย่าง 1. ถ้า A = {0, 1, 2, 3, 4} และ B = {3 , 4 , 5 , 6 , 7}

จะได้ A - B = {0, 1, 2} และ B - A = {5 , 6 , 7}

ตัวอย่าง 2. ถ้า U = {1, 2, 3, ... } และ C = { x|x เป็นจำนวนคู่บวก}

จะได้ U – C = {x|x เป็นจำนวนคี่บวก}

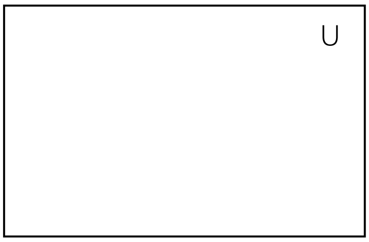
วีดิทัศน์ เรื่อง ผลต่างของเซต

เรื่องที่ 3

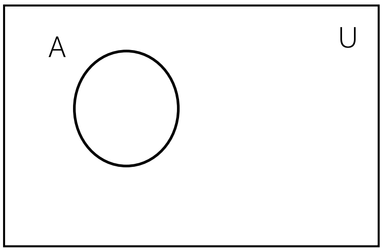
แผนภาพเวนน์ - ออยเลอร์และการแก้ปัญหา

3.1 แผนภาพเวนน์ - ออยเลอร์

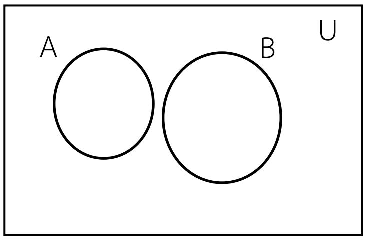
การเขียนแผนภาพแทนเซตช่วยให้เข้าใจเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างเซตชัดเจนยิ่งขึ้น การเขียนแผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์ (Venn-Euler) เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซต นิยมเขียนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากแทนเอกภพสัมพัทธ์ (U) และใช้รูปวงกลม วงรี หรือรูปปิดใด ๆ แทนเซต A, B, C,… ซึ่งเป็นสับเซตของ U



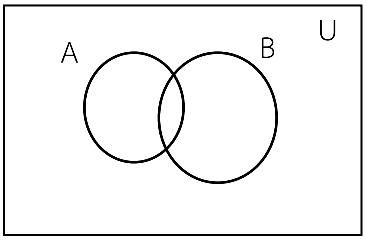
แผนภาพเอกภพสัมพันธ์ U



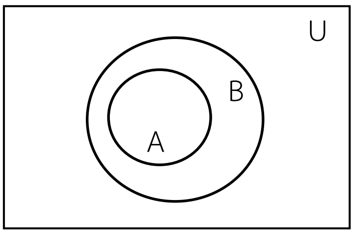
แผนภาพแสดงเซต A เป็นสับเซตของเองภพสัมพันธ์ U



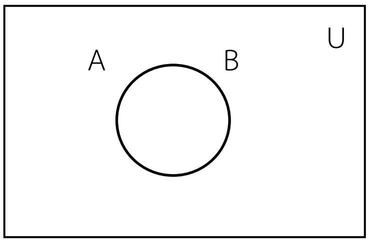
แผนภาพแสดงเซต A และเซต B ซึ่งเป็นสับเซตของ U โดยเซต A และเซต B ไม่มีสมาชิกซ้ำกันเลย



แผนภาพแสดงเซต A และเซต B ซึ่งเป็นสับเซตของ U โดยเซต A และ เซต B มีสมาชิกบางตัวซ้ำกัน

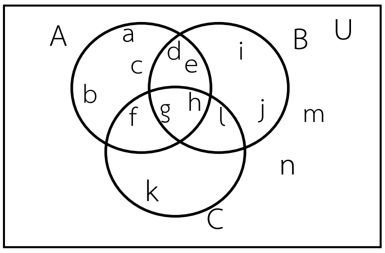


แผนภาพแสดงเซต A และเซต B ซึ่งเป็นสับเซตของ U และ $A \subset B$



แผนภาพแสดงเซต A และเซต B ซึ่งป็นสับเซตของ U และ A = B

ตัวอย่าง



จากแผนภาพ

$U = \{a, b, c, \ldots, n\}$

$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$B = \{d, e, g, h, i, j, l\}$

$C = \{f, g, h, k, l\}$

ในที่นี้ เซต A และ B มีสมาชิกร่วมกันคือ $\{d, e, g, h\}$

เซต B และ C มีสมาชิกร่วมกันคือ $\{g, h, l\}$

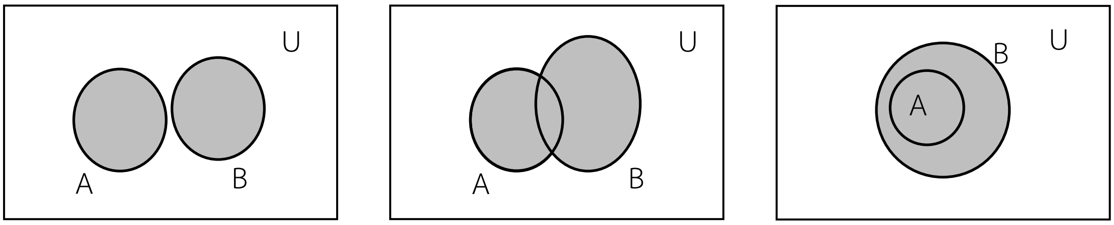
เซต A และ C มีสมาชิกร่วมกันคือ $\{f, g, h\}$

เซต A, B และ C มีสมาชิกร่วมกันคือ $\{g, h\}$

วีดิทัศน์ เรื่อง แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์

3.1.1 ยูเนียน (Union) ยูเนี่ยนของเซต A และ B คือเซตที่ประกอบด้วย สมาชิกของเซต A หรือสมาชิกของเซต B หรือทั้งสองเซต เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \cup B$

เขียนแผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์ แสดง $A \cup B$ ได้ดังนี้

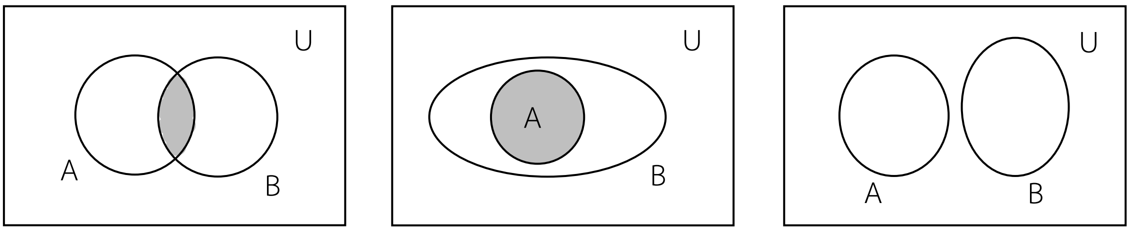


(ส่วนที่แรเงาคือ $A \cup B$)

3.1.2 อินเตอร์เซกชัน (intersection)

อินเตอร์เชกชันของเซต A และ เซต B คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ร่วมกันทั้ง เซต A และ เซต B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \cap B$

เขียนแผนภาพของแวนน์ – ออยเลอร์ แสดง $A \cap B$ ได้ดังนี้

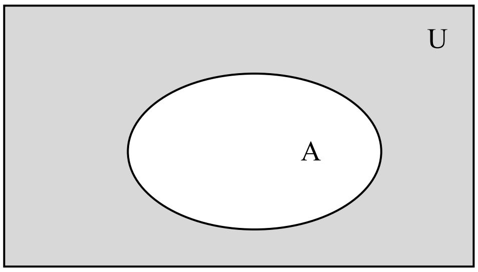


(ส่วนที่แรเงาคือ $A \cup B$)

3.1.3 คอมพลีเมนต์ (Complement)

คอมพลีเมนต์ของเซต A คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของเอกภพสัมพัทธ์ (U) แต่ไม่เป็นสมาชิกของ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A' (อ่านว่า เอไพรม์)

เขียนแผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์แสดง A' ได้ ดังนี้

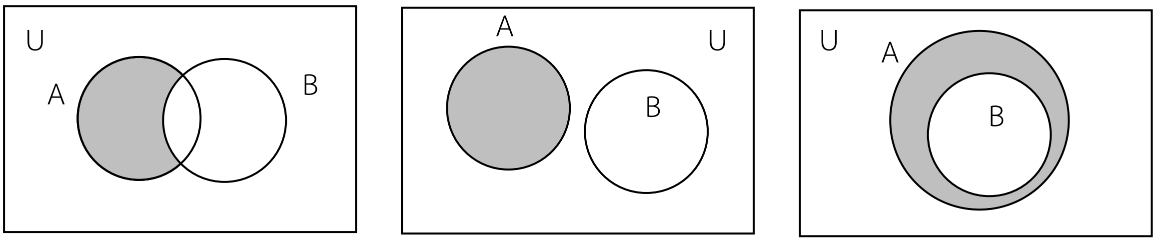


(ส่วนที่แรเงา คือ A')

3.1.4 ผลต่าง (Relative Complement or Difference)

ผลต่างของเซต A และ เซต B คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ในเซต A แต่ไม่ได้อยู่ในเซต B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A - B$ ได้ดังนี้

เขียนแผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์แสดง $A - B$ ได้ ดังนี้



(ส่วนที่แรเงา คือ $A - B$)

วีดิทัศน์ เรื่อง การเขียนแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ : ยูเนียน

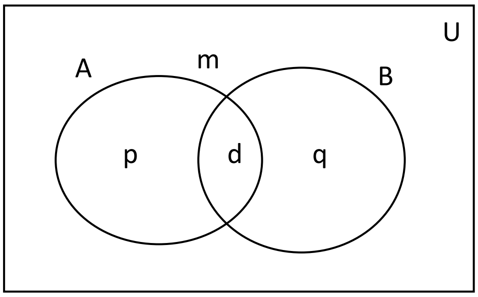
วีดิทัศน์ เรื่อง การเขียนแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ : อินเตอเซคชัน

วีดิทัศน์ เรื่อง การเขียนแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ : คอมพลีเมนต์

วีดิทัศน์ เรื่อง การเขียนแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ : ผลต่าง

3.2 การหาจำนวนสมาชิกของเซตจำกัด

ให้พิจารณา สมาชิกของ U เซต A และเซต B ในภาพ



$U = \{p, q, d, m\}$

$A = \{p, d\}$

$B = \{d, q\}$

$A \cap B = \{d\}$

$A \cup B = \{p, d, q\}$

จะได้ 1) $n(A) = 2$ 2) $n(B) = 2$

2) $n(A \cap B) = 1$ 4) $n(A \cup B) = 3$

ถ้าเซต A และ B ไม่มีสมาชิกร่วมกันจะได้

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B)}$$

ถ้าเซต A และ B มีสมาชิกบางตัวร่วมกันจะได้

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ A มีสมาชิก 15 ตัว B มีสมาชิก 12 ตัว $A \cap B$ มีสมาชิก 7 ตัว จงหาจำนวนสมาชิกของ $A \cup B$

วิธีทำ

$n(A) = 15$, $n(B) = 12$, $n(A \cap B) = 7$

จากสูตร $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 15 + 12 - 7 = 20$

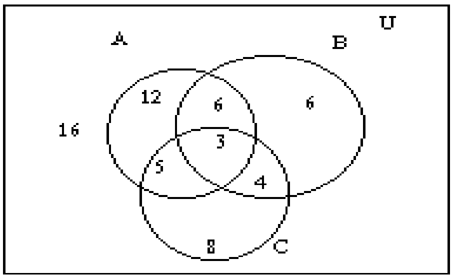
ดังนั้น จำนวนสมาชิกของ $A \cup B$ เท่ากับ 20 ตัว

วีดิทัศน์ เรื่อง การหาจำนวนสมาชิกของเซตจำกัด

วีดิทัศน์ เรื่อง การหาจำนวนสมาชิกของเซตจำกัดที่มีสับเซตในเอกภพสัมพัทธ์ 2 เซต

กรณีใน U มี 3 เซต คือ เซต A เซต B และเซต C จำนวนสมาชิกใน A หรือ B หรือ C คือ $n(A \cup B \cup C)$ หาได้จากสูตร

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$



ตัวอย่าง พิจารณาจากรูป ตัวเลขในภาพแสดง**จำนวนสมาชิก**ของเซต

จะได้

1) $n(U) = 60$
2) $n(A) = 26$
3) $n(B \cap C) = 7$
4) $n(A \cap C) = 8$
5) $n(A \cap B \cap C) = 3$

วีดิทัศน์ เรื่อง การหาจำนวนสมาชิกของเซตจำกัด ที่มีสับเซตในเอกภพสัมพัทธ์ 3 เซต

3.3 การแก้ปัญหาเกี่ยวกับจำนวนสมาชิกของเซต

ตัวอย่างที่ 1 บริษัทแห่งหนึ่งมีพนักงาน 80 คน พบว่า พนักงาน 18 คนมีรถยนต์ พนักงาน 23 คน มีบ้านเป็นของตัวเอง และพนักงาน 9 คน มีบ้านและรถยนต์ของตัวเอง

จงหา

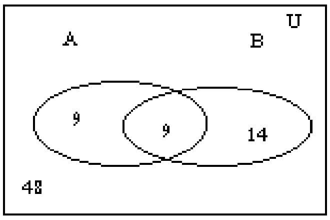
1) จำนวนพนักงานทั้งหมดที่มีรถยนต์หรือมีบ้านเป็นของตัวเอง
2) จำนวนพนักงานที่ไม่มีรถยนต์หรือบ้านของตัวเอง

วิธีทำ ให้ U แทนเซตของพนักงานทั้งหมด

A แทนเซตของพนักงานที่มีรถยนต์

B แทนเซตของพนักงานที่มีบ้านเป็นของตัวเอง

เขียนจำนวนพนักงานที่สอดคล้องกับข้อมูลลงในแผนภาพ เวนท์ – ออยเลอร์



จากแผนภาพจะได้ว่า

1) $n(A) = 18$, $n(B) = 23$, $n(A \cap B) = 9$

โดยใช้สูตร $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 18 + 23 - 9 = 32$

ดังนั้น จำวนพนักงานที่มีรถยนต์หรือมีบ้านของตัวเองเป็น 32 คน

2) เนื่องจากพนักงานทั้งหมด 80 คน

นั่นคือ พนักงานที่ไม่มีรถยนต์หรือบ้านของตัวเอง = 80 - 32 = 48 คน

ตัวอย่างที่ 2 ในการสำรวจเกี่ยวกับความชอบของนักศึกษา 100 คน พบว่านักศึกษาที่ชอบเรียนคณิตศาสตร์ 52 คน นักศึกษาที่ชอบเรียนภาษาไทย 60 คน นักศึกษาที่ไม่ชอบเรียนคณิตศาสตร์และไม่ชอบเรียนภาษาไทยมี 14 คน จงหานักศึกษาที่ชอบเรียนคณิตศาสตร์และภาษาไทย

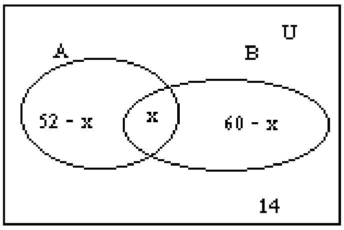
วิธีทำ เขียนแผนภาพ เวนท์ – ออยเลอร์ ให้ U แทนเซตของนักศึกษาทั้งหมด

A แทนเซตของนักศึกษาที่ชอบเรียนคณิตศาสตร์

B แทนเซตของนักศึกษาที่ชอบเรียนภาษาไทย

ให้ x แทนจำนวนนักศึกษาที่ชอบเรียนคณิตศาสตร์และภาษาไทย หรือ $n(A \cap B) = x$

ดังนั้น จำนวนนักศึกษาที่ชอบคณิตศาสตร์อย่างเดียว หรือ $n(A) = 52 - x$



จำนวนนักศึกษาที่ชอบภาษาไทยอย่างเดียว หรือ $n(B) = 60 - x$

จากแผนภาพเขียนสมการได้ดังนี้

$$(52 - x) + x + (60 - x) = 100 - 14$$

$$112 - x = 86$$

$$x = 112 - 86 = 26$$

ดังนั้น จำนวนนักศึกษาที่ชอบเรียนคณิตศาสตร์และภาษาไทย มี 26 คน

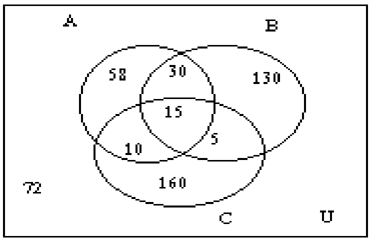
ตัวอย่างที่ 3 ในการสำรวจผู้ใช้สบู่ 3 ชนิด คือ ก , ข , ค พบว่ามีผู้ใช้ชนิด ก. 113 คน, ชนิด ข. 180 คน, ชนิด ค. 190 คน, ใช้ชนิด ก . และ ข. 45 คน, ชนิด ก. และ ค. 25 คน, ชนิด ข. และ ค. 20 คน, ใช้ทั้ง 3 ชนิด 15 คน, ไม่ใช้ทั้ง 3 ชนิด 72 คน จงหาจำนวนของผู้เข้ารับการสำรวจทั้งหมด

วิธีทำ ให้ U แทนจำนวนผู้สำรวจทั้งหมด

A แทนผู้ใช้สบู่ชนิด ก.

B แทนผู้ใช้สบู่ชนิด ข.

C แทนผู้ใช้สบู่ชนิด ค.



เขียนจำนวนผู้ใช้สบู่ที่สอดคล้องกับข้อมูลลงในแผนภาพตามลำดับ คือ

1) ใส่จำนวนผู้ใช้สบู่ทั้ง 3 ชนิด หรือ $n(A \cap B \cap C) = 15$

2) ใส่จำนวนผู้ใช้สบู่ 2 ชนิด ที่ลบด้วยจำนวนผู้ใช้สบู่ทั้ง 3 ชนิด หรือ

$n(A \cap B) = 45 - 15 = 30$

$n(A \cap C) = 25 - 15 = 10$

$n(B \cap C) = 20 - 15 = 5$

3) ใส่จำนวนผู้ใช้สบู่ชนิดเดียว

$n(A) = 113 - 30 - 15 - 10 = 58$

$n(B) = 180 - 30 - 15 - 5 = 130$

$n(C) = 190 - 10 - 15 - 5 = 160$

จำนวนผู้ที่ใช้สบู่ ก. หรือ ข. หรือ ค. หรือ $n(A \cup B \cup C) = 58 + 30 + 10 + 15 + 160 + 5 + 130$

$= 408$ คน

จำนวนผู้ที่ไม่ใช้ทั้ง 3 ชนิด $= 72$ คน

ดังนั้น จำนวนของผู้เข้ารับการสำรวจทั้งหมด $408 + 72 = 480$ คน

วีดิทัศน์ เรื่อง การแก้โจทย์ปัญหาจำนวนสมาชิกของเซตจำกัดที่มีสับเซตในเอกภพสัมพัทธ์ 2 เซต

วีดิทัศน์ เรื่อง การแก้โจทย์ปัญหาจำนวนสมาชิกของเซตจำกัดที่มีสับเซตในเอกภพสัมพัทธ์ 3 เซต

กิจกรรมบทที่ 3

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก
   1) A เป็นเซตชื่อของปีนักษัตร
   2) $M = \{x \mid x \in N$ และ $5 \leq x \leq 10\}$
   3) P = {x | x เป็นพยัญชนะในคำว่า Philippine}

2. จงเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไข
   1) N = {มกราคม, มีนาคม, พฤษภาคม, กรกฎาคม, สิงหาคม, ตุลาคม, ธันวาคม}
   2) $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
   3) D = เป็นเซตของจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 25 และ 3 หารลงตัว

3. กำหนดให้ $U = \{x \mid x \in N$ และ $x \leq 15\}$

   $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

   $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

   $C = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

   จงหา
   1) $A \cup B$
   2) $A \cap C$
   3) $B - C$
   4) B'
   5) $(A \cup B) \cap C$
   6) $(A \cap B)' - C$

4. จากการสอบถามเด็กผู้ชาย 75 คน ชอบของเล่นที่เป็นรถสีแดง 27 คน สีฟ้า 34 คน สีเขียว 42 คน ชอบทั้งสีแดงและสีเขียว 14 คน ชอบทั้งสีฟ้าและสีเขียว 12 คน ชอบสีแดงและสีฟ้า 10 คน ชอบทั้งสามสี 7 คน จงหาว่าเด็กที่ชอบของเล่นที่เป็นรถเพียงสีเดียวมีกี่คน

ดูเฉลยกิจกรรมท้ายเล่ม

บทที่ 4
การให้เหตุผล

สาระสำคัญ

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นการสรุปผลภายหลังจากค้นพบความจริงที่ได้จากการสังเกตหรือการทดลองหลาย ๆ ครั้งจากทุก ๆ กรณีย่อยแล้วนำบทสรุปมาเป็นความรู้แบบทั่วไปเราเรียกข้อสรุปแบบนี้ว่า " ข้อความคาดการณ์"
2. การให้เหตุผลแบบนิรนัยไม่ได้คำนึงถึงความจริงหรือความเท็จแต่จะคำนึงเฉพาะข้อสรุปที่ต้องสรุปออกมาได้เท่านั้น

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. อธิบายและใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัยได้
2. บอกได้ว่าการอ้างเหตุผลสมเหตุสมผลหรือไม่ โดยใช้แผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์ได้

ขอบข่ายเนื้อหา

เรื่องที่ 1 การให้เหตุผล

เรื่องที่ 2 การอ้างเหตุผลโดยใช้แผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์

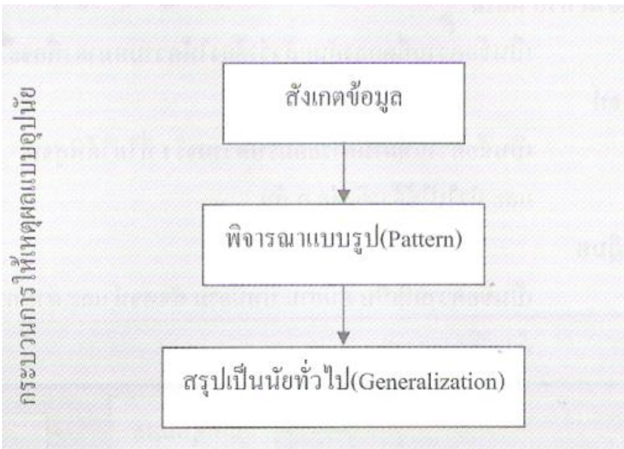
เรื่องที่ 1

การให้เหตุผล

การให้เหตุผลมีความสำคัญ เพราะการดำเนินชีวิตของคนเราไม่ว่าจะเป็นความเชื่อ การโต้แย้ง และการตัดสินใจ เราจำเป็นต้องใช้เหตุผลประกอบทั้งสิ้น การให้เหตุผล แบ่งเป็น 2 ประเภท ได้แก่ การให้เหตุผลแบบอุปนัย และการให้เหตุผลแบบนิรนัย

1.1 การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning)

การให้เหตุผลแบบอุปนัย หมายถึง การสรุปที่ได้จากการใช้สังเกต หรือการทดลองมาแล้วหลายๆ ครั้ง แล้วนำบทสรุปมาเป็นความรู้แบบทั่วไป หรือการให้เหตุผลแบบอุปนัย หมายถึง การให้เหตุผลโดยยึดความจริงส่วนย่อยที่พบเห็นไปสู่ความจริงส่วนใหญ่



<u>ตัวอย่างการให้เหตุผลแบบอุปนัย</u>

1. มนุษย์สังเกตพบว่า : ทุก ๆวันดวงอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออก และตกทางทิศตะวันตก

จึงสรุปว่า : ดวงอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออก และตกทางทิศตะวันตกเสมอ

2. สุนทรี พบว่า ทุกครั้งที่คุณแม่ไปซื้อก๋วยเตี๋ยวผัดไทยจะมีต้นกุยช่ายมาด้วยทุกครั้ง

จึงสรุปว่า ก๋วยเตี๋ยวผัดไทยต้องมีต้นกุยช่าย

ตัวอย่างการให้เหตุผลแบบอุปนัยทางคณิตศาสตร์

1. จงใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยสรุปผลเกี่ยวกับผลบวกของจำนวนคู่สองจำนวน

$0+2 = 2$ (จำนวนคู่)

$2+4 = 6$ (จำนวนคู่)

$4+6 = 10$ (จำนวนคู่)

$6+8 = 14$ (จำนวนคู่)

$8+10 = 18$ (จำนวนคู่)

สรุปผลว่า ผลบวกของจำนวนคู่สองจำนวนเป็นจำนวนคู่

2. $11 \times 11 = 121$

$111 \times 111 = 12321$

$1111 \times 1111 = 1234321$

$11111 \times 11111 = 123454321$

3. $(1 \times 9) + 2 = 11$

$(12 \times 9) + 3 = 111$

$(123 \times 9) + 4 = 1111$

$(1234 \times 9) + 5 = 11111$

ข้อสังเกต

1) ข้อสรุปของการให้เหตุผลแบบอุปนัยอาจจะไม่จริงเสมอไป

2) การสรุปผลของการให้เหตุผลแบบอุปนัยอาจขึ้นอยู่กับประสบการณ์ของผู้สรุป

3) ข้อสรุปที่ได้จากการให้เหตุผลแบบอุปนัยไม่จำเป็นต้องเหมือนกัน

ตัวอย่าง 1. กำหนด จำนวน 2, 4, 6 , a จงหา จำนวน a

จะได้ a = 8

2. กำหนด จำนวน 2, 4, 6 , a จงหา จำนวน a

จะได้ a = 10 เพราะว่า 4 + 6 = 10

3. กำหนด จำนวน 2, 4, 6, a จงหา จำนวน a

จะได้ a = 22 เพราะว่า $6 = (2 \times 4) - 2$ และ $22 = (4 \times 6) - 2$

4) ข้อสรุปของการให้เหตุผลแบบอุปนัยอาจ ผิดพลาดได้

ตัวอย่าง ให้ $f(n) = n^2 - 79n + 1601$

ทดลองแทนค่าจำนวนนับ n ใน f(n)

n = 1 ได้ f(1) = 1523 เป็นจำนวนเฉพาะ

n = 2 ได้ f(2) = 1447 เป็นจำนวนเฉพาะ

n = 3 ได้ f(3) = 1373 เป็นจำนวนเฉพาะ

$\therefore \quad f(n) = n^2 - 79n + 1601$

แทนค่า n ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งแทน $n = 79$ ได้ $f(79)$ เป็นจำนวนเฉพาะ

จากการทดลองดังกล่าว อาจสรุปได้ว่า $n^2 - 79n + 1601$ เป็นจำนวนเฉพาะ สำหรับทุกจำนวนนับ

แต่ $f(n) = n^2 - 79n + 1601$

$$f(80) = 80^2 - (79)(80) + 1601$$

$$= 1681$$

$$= (41)(41)$$

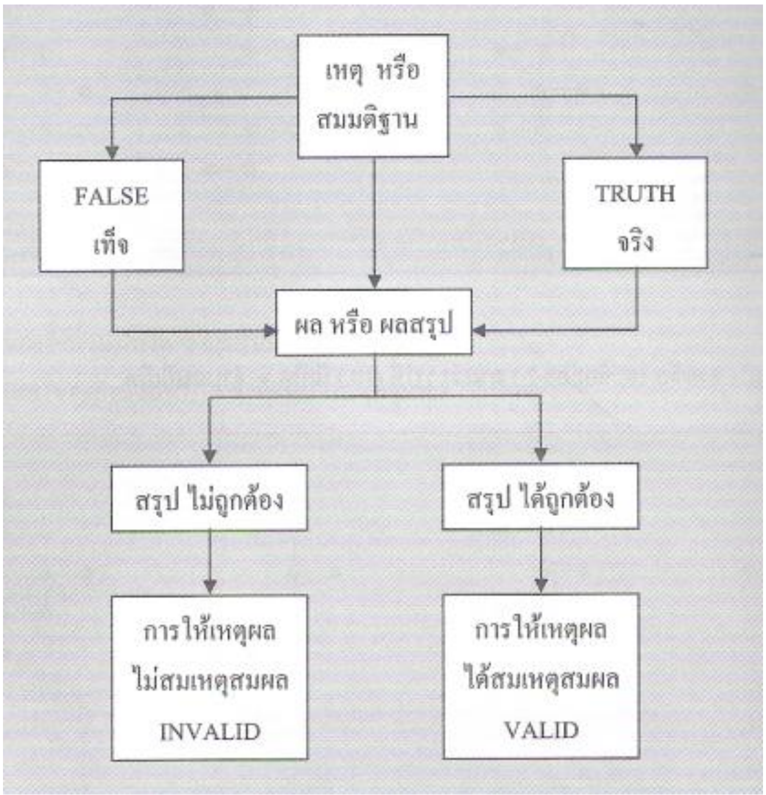
$\therefore$ $f(80)$ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

1.2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive reasoning)

เป็น การนำความรู้ ข้อตกลง กฎ หรือบทนิยามที่ยอมรับว่าเป็นจริง เพื่อหาเหตุผลนำไปสู่ข้อสรุป

การให้เหตุผลแบบนิรนัย ไม่ได้คำนึงถึง ความจริงหรือความเท็จ แต่จะคำนึงถึง เฉพาะข้อสรุปที่ต้องออกมาได้เท่านั้น

พิจารณากระบวนการการให้เหตุผลแบบนิรนัย จากแผนภาพดังนี้



<u>ตัวอย่างการให้เหตุผลแบบนิรนัย</u>

1. เหตุ 1) จำนวนคู่หมายถึงจำนวนที่หารด้วย 2 ลงตัว

2) 10 หารด้วย2 ลงตัว

ผล 10 เป็นจำนวนคู่

2. เหตุ 1) คนที่ไม่มีหนี้สินและมีเงินฝากในธนาคารมากกว่า 10 ล้านบาท เป็นเศรษฐี

2) คุณมานะไม่มีหนี้สินและมีเงินฝากในธนาคาร 11 ล้านบาท

ผล คุณมานะเป็นเศรษฐี

3. เหตุ 1) นักกีฬากลางแจ้งทุกคนจะต้องมีสุขภาพดี

2) เกียรติศักดิ์เป็นนักฟุตบอลทีมชาติไทย

ผล เกียรติศักดิ์มีสุขภาพดี

จากตัวอย่างจะเห็นว่าการยอมรับความจริงบางอย่างก่อน แล้วจึงหาข้อสรุปจากสิ่งที่ยอมรับแล้วนั้น ซึ่งเรียกว่า ผล การสรุปผลจะถูกต้องก็ต่อเมื่อเป็นการสรุปผลได้อย่างสมเหตุสมผล(valid) เช่น

เหตุ 1) เรือทุกลำลอยน้ำ

2) ถังน้ำพลาสติกลอยน้ำได้

ผล ถังน้ำพลาสติกเป็นเรือ

การสรุปผลจากข้างต้นไม่สมเหตุสมผล แม้ว่าข้ออ้างหรือเหตุทั้งสองข้อจะเป็นจริง แต่การที่เราทราบ ว่า เรือทุกลำลอยน้ำได้ก็ไม่ได้หมายความว่าสิ่งอื่นๆ ที่ลอยน้ำได้จะต้องเป็นเรือเสมอไป ข้อสรุปในตัวอย่างข้างต้นจึงเป็นการสรุปที่ไม่สมเหตุสมผล

ข้อสังเกต

1. เหตุเป็นจริง และ ผลเป็นจริง

เหตุ ปลาทุกตัวมีเหงือก

สัตว์มีเหงือกทุกตัวเป็นสัตว์น้ำ

ผล ดังนั้น ปลาเป็นสัตว์น้ำ

2. เหตุเป็นเท็จ และ ผลเป็นเท็จ

เหตุ ช้างออกลูกเป็นไข่

สัตว์ออกลูกเป็นไข่เป็นสัตว์น้ำ

ผล ช้างเป็นสัตว์น้ำ

3. เหตุอาจเป็นจริงและผลอาจเป็นเท็จ

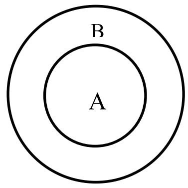
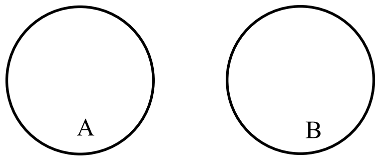
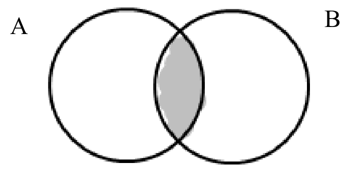
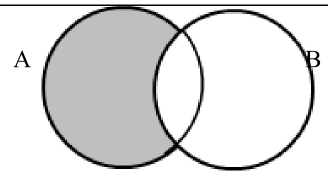
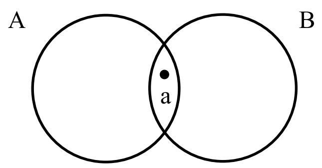
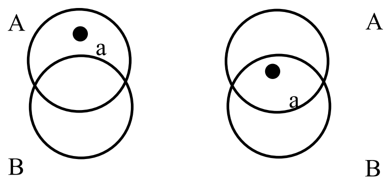
4. ผลสรุปสมเหตุสมผลไม่ได้ประกันว่าข้อสรุปจะต้องเป็นจริงเสมอไป

วีดิทัศน์ เรื่อง การให้เหตุผลแบบอุปนัย และ นิรนัย

เรื่องที่ 2

การอ้างเหตุผลโดยใช้แผนภาพของเวนน์- ออยเลอร์

ออยเลอร์ เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวสวิสเซอร์แลนด์ มีชีวิตอยู่ระหว่าง ค.ศ. 1707 - 1783 เขาได้ค้นพบวิธีการตรวจสอบความสมเหตุสมผลโดยใช้รูปปิด เช่น วงกลม ซึ่งเป็นวิธีการที่ง่าย และรวดเร็ว แผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์ ที่ใช้ในการให้เหตุผลมี 6 แบบ ดังนี้

แบบที่	เหตุและผล	แผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์
1	สมาชิกของ A ทุกตัวเป็นสมาชิกของ B เช่น A แทนเซตของคนไทย B แทนเซตของคนกลุ่มอาเซียน	
2	ไม่มีสมาชิกของ A ใดๆ เป็นสมาชิกของ B เช่น A แทนเซตของคนไทย B แทนเซตของคนยุโรป	
3	มีสมาชิกของ A บางส่วน เป็นสมาชิกของ B เช่น A แทนเซตของคนไทย B แทนเซตของคนนับถือศาสนาพุทธ	
4	มีสมาชิกของ A บางส่วน ไม่เป็นสมาชิกของ B เช่น A แทนเซตของคนชอบเล่นกีฬา B แทนเซตของคนอ้วน	
5	มีสมาชิกของ A หนึ่งสมาชิก ที่เป็นสมาชิกของ B เช่น A แทนเซตของจำนวนคู่ B แทนเซตของจำนวนเฉพาะ a = 2	
6	มีสมาชิกของ B บางตัว ที่เป็นสมาชิกของ A และ a เป็นสมาชิกของ A เช่น B แทนเซตของคนไทย A แทนเซตของคนนับถือศาสนาพุทธ a หมิวนับถือศาสนาพุทธ	

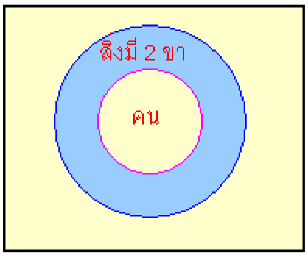
ตัวอย่าง การตรวจสอบความสมเหตุสมผลของการให้เหตุผลโดยใช้แผนภาพ

1. เหตุ 1 : คนทุกคนเป็นสิ่งที่มีสองขา

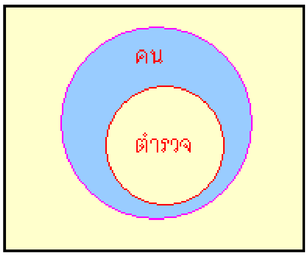
2 : ตำรวจทุกคนเป็นคน

ผลสรุป ตำรวจทุกคนเป็นสิ่งที่มีสองขา

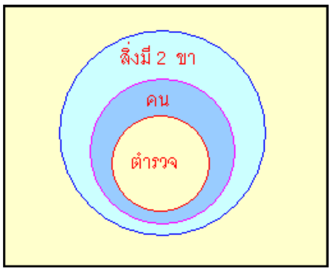
จากเหตุ 1



จากเหตุ 2



แผนภาพรวม

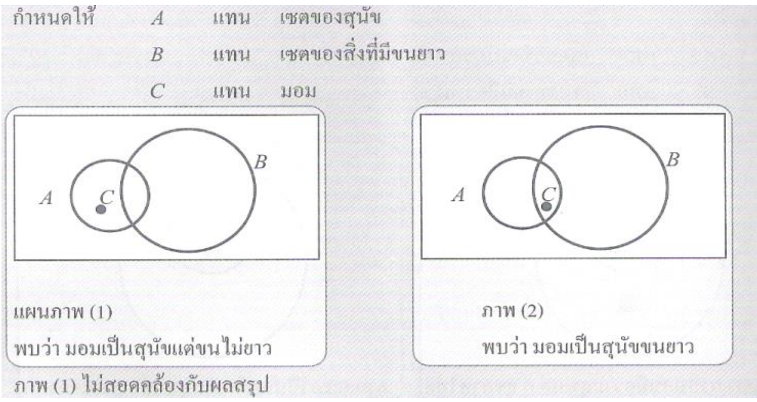


จากแผนภาพจะเห็นว่า วงของ " ตำรวจ " อยู่ในวงของ " สิ่งมี 2 ขา " แสดงว่า " ตำรวจทุกคนเป็นคนมีสองขา " ซึ่งสอดคล้องกับผลสรุปที่กำหนดให้ ดังนั้น การให้เหตุผลนี้สมเหตุสมผล

2. เหตุ 1 : สุนัขบางตัวมีขนยาว

2 : มอมเป็นสุนัขของฉัน

ผลสรุป มอมเป็นสุนัขที่มีขนยาว



ดังนั้น ผลสรุปที่ว่า มอมเป็นสุนัขที่มีขนยาว ไม่สมเหตุสมผล

วีดิทัศน์ เรื่อง การอ้างเหตุผลโดยใช้แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์

บทที่ 5
อัตราส่วนตรีโกณมิติและการนำไปใช้

สาระสำคัญ

1. ถ้ารูปสามเหลี่ยมคู่ใดคล้ายกัน อัตราส่วนของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่เท่ากันจะเท่ากัน

2. ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากทุกรูป อัตราส่วนความยาวด้าน 2 ด้าน จะถูกกำหนดค่าต่างๆไว้ดังนี้

2.1 ค่าไซน์ของมุมใด (sine) จะเท่ากับอัตราส่วนระหว่างความยาวของด้านตรงข้ามมุมกับความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก

2.2 ค่าโคไซน์ของมุมใด (cosine) จะเท่ากับอัตราส่วนระหว่างความยาวด้านประชิดมุมกับความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก

2.3 ค่าแทนเจนต์ของมุมใด (tangent) จะเท่ากับ อัตราส่วนระหว่างความยาวของด้านตรงข้ามมุมกับความยาวของด้านประชิดมุมนั้นๆ

3. นอกจากอัตราส่วนตรีโกณมิติหลัก 3 ค่านี้แล้ว ส่วนกลับของ sine, cosine และ tangent เรียกว่า cosecant, secant และ cotangent ตามลำดับ

4. อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30, 45 และ 60 องศา มีค่าเฉพาะของแต่ละอัตราส่วน

5. การแก้ปัญหาโจทย์ที่เกี่ยวข้อง โดยเฉพาะการนำไปใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัดระยะทางและความสูงจะใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติในการช่วยหาคำตอบ

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. อธิบายการหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติได้
2. หาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30^0, 60^0 และ 45^0 ได้
3. นำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับระยะทาง ความสูง และการวัดได้

ขอบข่ายเนื้อหา

เรื่องที่ 1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ

เรื่องที่ 2 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30, 60 และ 45 องศา

เรื่องที่ 3 การนำอัตราส่วนตรีโกณมิติ ไปใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับระยะทาง ความสูง และการวัด

เรื่องที่ 1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ

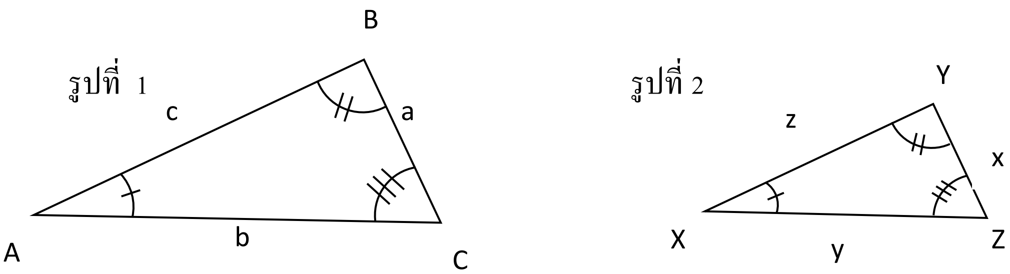
อัตราส่วนตรีโกณมิติเป็นเรื่องของการหาความสัมพันธ์ระหว่างด้าน มุม และพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม มีความสำคัญต่อวิชาดาราศาสตร์ การเดินเรือ และงานสำรวจใช้ในการคำนวณส่วนสูงของภูเขา และหาความกว้างของแม่น้ำ มีประโยชน์มากสำหรับวิชาวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และการศึกษาเกี่ยวกับวัตถุ ซึ่งมีสภาพเป็นคลื่น เช่น แสง เสียง แม่เหล็กไฟฟ้าและวิทยุ

1.1 ความรู้เดิมที่ต้องนำมาใช้ในบทเรียนนี้

1) <u>สมบัติสามเหลี่ยมคล้าย</u>

พิจารณารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากัน 3 คู่ ดังนี้

ถ้ารูปสามเหลี่ยม 2 รูป มีมุมเท่ากันมุมต่อมุมทั้ง 3 คู่ แล้ว สามเหลี่ยม 2 รูปนี้จะคล้ายกัน ดังรูป



จากรูปกำหนด $\hat{A} = \hat{X}$, $\hat{B} = \hat{Y}$, $\hat{C} = \hat{Z}$

ดังนั้น รูปสามเห ลี่ยม ABC คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม XYZ และจากสมบัติการคล้ายกันของ รูปสามเหลี่ยมจะได้ผลตามมาคือ

$$\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{AC}{XZ} \quad \text{หรือ} \quad \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

เมื่อ a, b, c เป็นความยาวของด้าน BC, AC และ AB ตามลำดับในสามเหลี่ยม ABC

x, y, z เป็นความยาวของด้าน YZ, XZ และ XY ตามลำดับในสามเหลี่ยม XYZ

จาก $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ หรือจะได้ว่า $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$

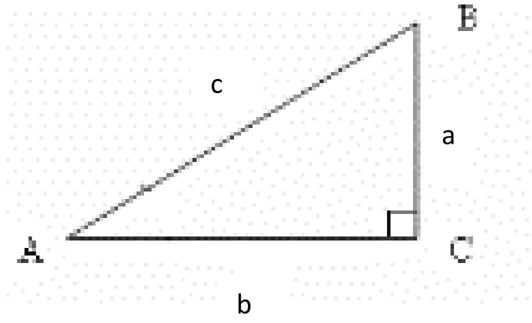
$\frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ หรือจะได้ว่า $\frac{b}{c} = \frac{y}{z}$

$\frac{a}{x} = \frac{c}{z}$ หรือจะได้ว่า $\frac{a}{c} = \frac{x}{z}$

วีดิทัศน์ เรื่อง สมบัติสามเหลี่ยมคล้าย

2) <u>สมบัติสามเหลี่ยมมุมฉาก</u>

ถ้าให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มี C เป็นมุมฉาก



ให้ ด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมฉากหรือมุม C ยาว c หน่วย

ด้านที่อยู่ตรงข้ามมุม A ยาว a หน่วย

ด้านที่อยู่ตรงข้ามมุม B ยาว b หน่วย

จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากดังนี้

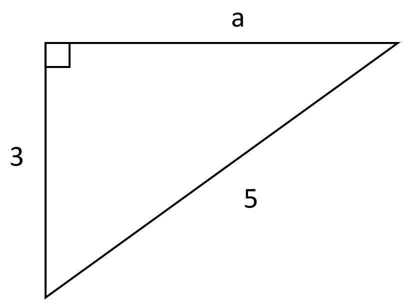
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

เมื่อ c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก คือมุม C

a และ b แทนความยาวของด้านประกอบมุมฉาก คือมุม A และมุม B

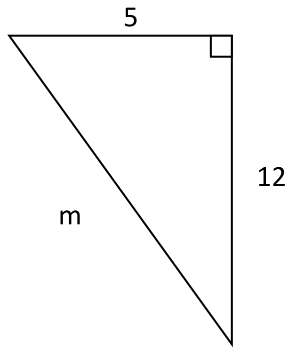
ตัวอย่าง

1) จงหาความยาว a จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้



$$5^2 = a^2 + 3^2$$
$$a^2 + 9 = 25$$
$$a^2 = 16$$
ดังนั้น $a = 4$

2) จงหาความยาว m จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้

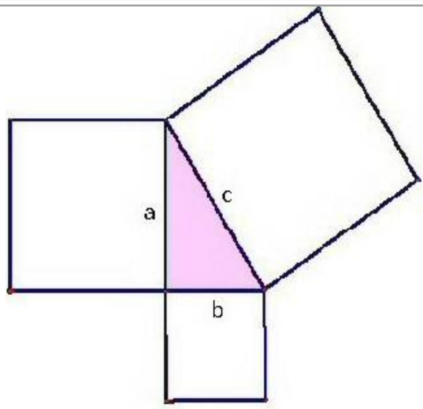


$$m^2 = 5^2 + 12^2$$
$$= 25 + 144$$
$$= 169$$
ดังนั้น $m = 13$

ทฤษฎีบทปีทาโกรัส

ปีทาโกรัสได้ศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างด้านตรงข้ามมุมฉากและด้านประกอบมุมฉากของสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีใจความว่า

ในสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ พื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก
จะเท่ากับผลบวกของพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก



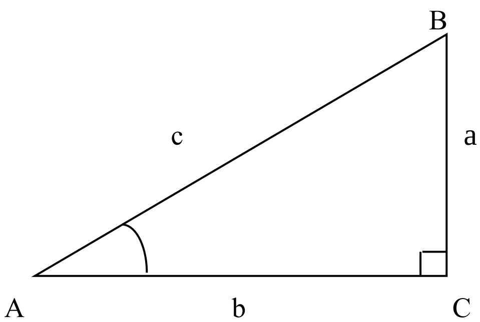
$c^2 = a^2 + b^2$

1.2 อัตราส่วนตรีโกณมิติ

อัตราส่วนตรีโกณมิติ เป็นเรื่องเกี่ยวกับอัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังนี้

1. ไซน์ (sine) ของมุมใดๆ เท่ากับอัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุม ต่อความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก (sine A เรียกย่อว่า sin A)
2. โคไซน์ (cosine) ของมุมใดๆเท่ากับอัตราส่วนของความยาวของด้านประชิดมุม ต่อความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก (cosine A เรียกย่อว่า cos A)
3. แทนเจนต์ (tangent) ของมุมใดๆ เท่ากับอัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุม ต่อความยาวของด้านประชิดมุม (tangent A เรียกย่อว่า tan A)

   กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC มี C เป็นมุมฉาก



อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม A

$$\sin A = \frac{\text{ความยาวของ ด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของ ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{\text{ความยาวของ ด้านประชิด มุม A}}{\text{ความยาวของ ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{\text{ความยาวของ ด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของ ด้านประชิด มุม A}} = \frac{a}{b}$$

ส่วนกลับของอัตราส่วนตรีโกณมิติมีชื่อเรียก ดังนี้

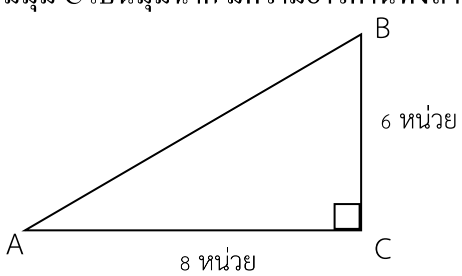
$$\operatorname{cosec} A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}} = \frac{c}{a}$$

$$\sec A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}} = \frac{c}{b}$$

$$\cot A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}} = \frac{b}{a}$$

ตัวอย่าง กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีมุม C เป็นมุมฉาก มีความยาวด้านทั้งสาม ดังรูป จงหาค่าต่อไปนี้

1. sin A, cos A และ tan A
2. sin B, cos B และ tan B



<u>วิธีทำ</u> กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีมุม C เป็นมุมฉาก จากทฤษฎีบทปีทาโกรัส จะได้ว่า

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

แทนค่า $AC = 8$, $BC = 6$

ดังนั้น $AB^2 = 8^2 + 6^2$

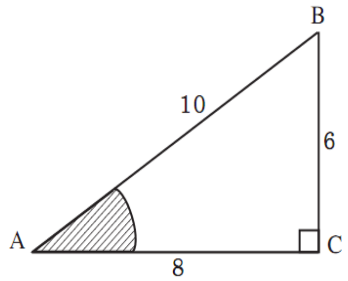
$= 64 + 36$

$= 100$

$= 10 \times 10$ หรือ 10^2

นั่นคือ $AB = 10$

(1) หาค่า sin A, cos A และ tan A โดยการพิจารณาที่มุม A

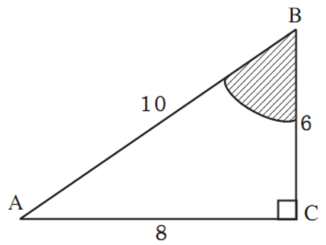


$$\sin A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}} = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

(2) หาค่า sin B, cos B และ tan B โดยการพิจารณาที่มุม B



$$\sin B = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม B}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\cos B = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม B}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\tan B = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม B}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม B}} = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

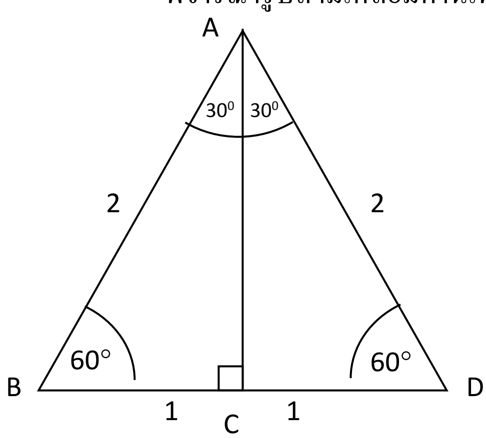
วีดิทัศน์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ

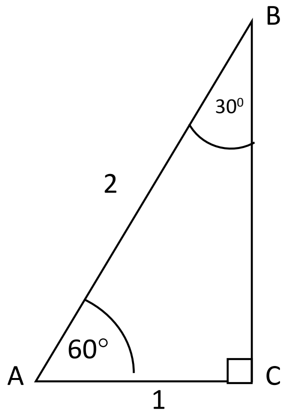
เรื่องที่ 2

การหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30, 45 และ 60 องศา

2.1 <u>การหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30 และ 60 องศา</u>

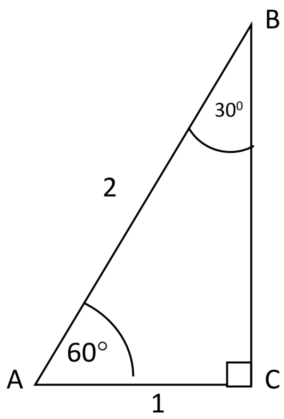
พิจารณารูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABD มีด้านยาวด้านละ 2 หน่วย ดังนี้





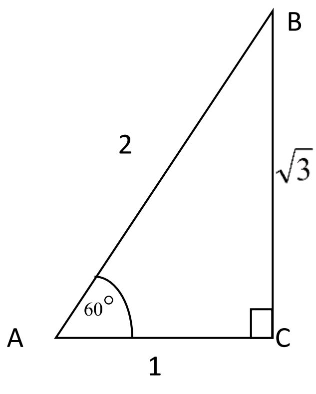
จากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABD ลาก AC แบ่งครึ่ง มุม A เส้นแบ่งครึ่งมุม A จะตั้งฉากกับ BD ที่จุด C โดยใช้หลักของสมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย ABC และ ADC จะได้ BC = CD = 1 หน่วย ดังรูป

จากสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ใช้คุณสมบัติของทฤษฎีปีทาโกรัสได้ดังนี้



$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$2^2 = 1^2 + BC^2$$
$$4 = 1 + BC^2$$
$$BC^2 = 4 - 1$$
$$= 3$$
$$\therefore BC = \sqrt{3}$$

อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 60° พิจารณาที่มุม A จะได้ดังนี้



$\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{cosec} 60^\circ = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$; $\sec 60^\circ = 2$

$\tan 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$; $\cot 60^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

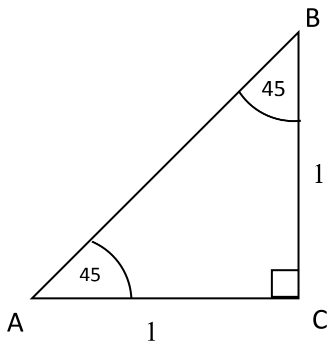
อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° พิจารณาที่มุม B จะได้ดังนี้

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad ; \quad \operatorname{cosec} 30^\circ = 2$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

2.2 <u>การหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 45 องศา</u>



พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีมุม C เป็นมุมฉาก และมีมุม A = มุม B = 45° จะได้ว่า $\overline{AC} = \overline{BC} = 1$ หน่วย

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ใช้คุณสมบัติของทฤษฎีปีทาโกรัสได้ดังนี้

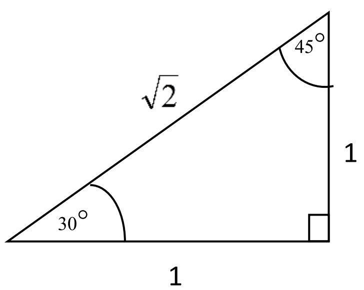
$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = 1^2 + 1^2$$

$$= 2$$

$$\therefore \quad AB = \sqrt{2}$$

อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 45° จะได้ดังนี้



$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ หรือ } \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ หรือ } \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \sec 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\tan 45^\circ = 1 \quad ; \quad \cot 45^\circ = 1$$

ตัวอย่าง 1 จงหาค่าต่อไปนี้

1) $\sin 30^\circ \sin 60^\circ + \cos 30^\circ \cos 60^\circ$

2) $(\cos 30^\circ)^2 + (\sin 30^\circ)^2$

3) $\tan^2 30^\circ + 2\sin 60^\circ + \tan 45^\circ - \tan 60^\circ + \cos^2 30^\circ$

4) $\cos 60^\circ - \tan^2 45^\circ + \frac{4}{3}\tan^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin 30^\circ$

5) $\frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} - \tan 45^\circ$

<u>วิธีทำ</u>

1) $\sin 30^\circ \sin 60^\circ + \cos 30^\circ \cos 60^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

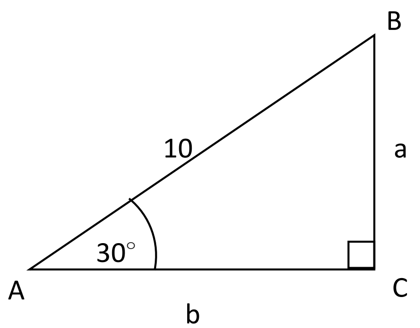
2) $(\cos 30^\circ)^2 + (\sin 30^\circ)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}+\frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

3)
$$\begin{aligned}\tan^2 30^\circ + 2\sin 60^\circ + \tan 45^\circ - \tan 60^\circ + \cos^2 30^\circ &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1-\sqrt{3}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\\ &= \frac{1}{3}+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+\frac{3}{4}\\ &= \frac{25}{12}\end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned}\cos 60^\circ - \tan^2 45^\circ + \frac{4}{3}\tan^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin 30^\circ &= \frac{1}{2}-(1)^2+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}-1+\frac{4}{9}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\\ &= \frac{7}{36}\end{aligned}$$

5) $\frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} - \tan 45^\circ = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}-1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{1}-1 = 1-1=0$

ตัวอย่าง 2 จงหาค่าของ a และ b จากรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้



<u>วิธีทำ</u> $\sin 30^\circ = \frac{BC}{AB}$

แทนค่า $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; $BC = a$ และ $AB = 10$

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{10}$$

$$a = 10\times\frac{1}{2}$$

$$= 5$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AC}{AB}$$

แทนค่า $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $AC = b$ และ $AB = 10$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{10}$$

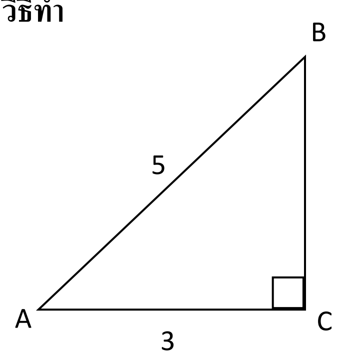
$$b = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 5\sqrt{3}$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีมุม C เป็นมุมฉาก และ $\sec A = \frac{5}{3}$ จงหา

(1) cos A (2) tan A (3) cosec A (4) sin B (5) cot B และ (6) sec B

วิธีทำ



กำหนด $\sec A = \frac{5}{3}$

เนื่องจาก $\sec A = \dfrac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}$

จากรูป AB = 5 และ AC = 3 และ จะได้ $BC^2 + AC^2 = AB^2$

$$BC^2 + 3^2 = 5^2$$

$$BC^2 = 25 - 9 = 16$$

$$BC = 4$$

จะได้ค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติดังนี้

(1) $\cos A = \frac{3}{5}$

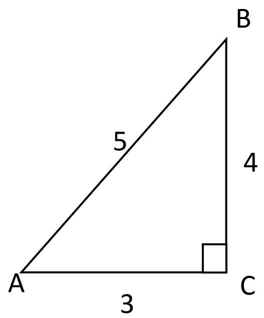
(2) $\tan A = \frac{4}{3}$

(3) $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{4}$

(4) $\sin B = \frac{3}{5}$

(5) $\cot B = \frac{4}{3}$

(6) $\sec B = \frac{5}{4}$



วีดิทัศน์ เรื่อง การหาอัตราส่วนตรีโกณมิติ

ของมุม 30° 60° *และ* 45°

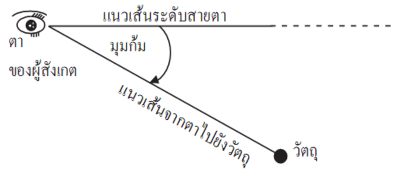
เรื่องที่ 3
การนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัดระยะทางและความสูง

อัตราส่วนตรีโกณมิติมีประโยชน์มากในการหาความยาว ระยะทางหรือส่วนสูงโดยที่ทราบค่ามุมใดมุมหนึ่ง และความยาวของด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก แล้วจะสามารถหาด้านที่เหลือได้

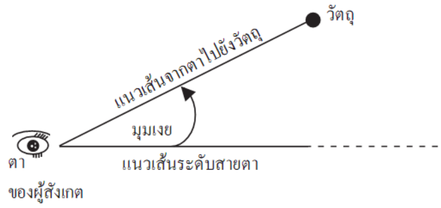
คำที่เกี่ยวข้องกับการนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้

เส้นระดับสายตา คือ เส้นที่ขนานกับแนวพื้นราบ

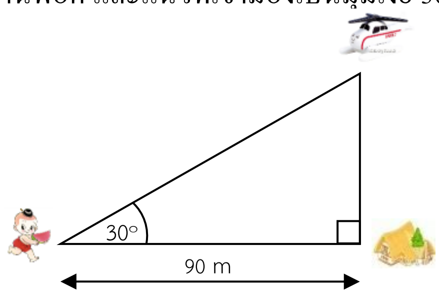
มุมก้ม คือ มุมที่แขนข้างหนึ่งของมุม อยู่ต่ำกว่าระดับสายตา



มุมเงย คือ มุมที่แขนข้างหนึ่งอยู่สูงกว่าเส้นระดับสายตา



__ตัวอย่างที่ 1__ สมพรยืนอยู่ห่างจากบ้านหลังหนึ่งเป็นระยะทาง 90 เมตร เขาเห็นเครื่องบิน เครื่องหนึ่งบินอยู่เหนือหลังคาบ้านพอดี และแนวที่เขามองเป็นมุมเงย 30 องศา จงหาว่าเครื่องบิน อยู่สูงจากพื้นดินกี่เมตร



วิธีทำ $\tan 30 = \dfrac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม 30}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม 30}}$

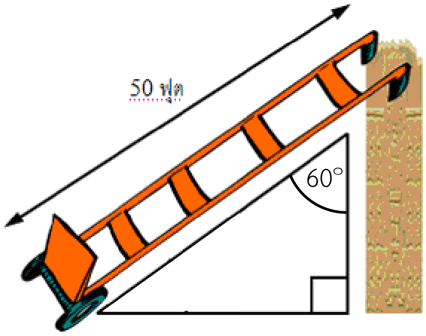
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม 30}}{90}$$

$\therefore$ ความยาวของด้านตรงข้ามมุม $30^\circ = \dfrac{90}{\sqrt{3}} = \dfrac{90}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{90\sqrt{3}}{3} = 30\sqrt{3}$

ดังนั้น ความสูงของเครื่องบินอยู่ห่างจากพื้นดิน $30\sqrt{3}$ เมตร

วีดิทัศน์ เรื่อง ตัวอย่างการแก้โจทย์ปัญหา (1)

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> บันไดยาว 50 ฟุต พาดอยู่กับกำแพง ปลายบันไดถึงขอบกำแพงพอดี ถ้าบันไดทำมุม 60° กับกำแพง จงหาว่าระยะทางระหว่างเชิงบันไดกับกำแพงยาวกี่ฟุต



<u>วิธีทำ</u> $\sin 60^{0} = \dfrac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } 60^{\circ}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } 60^{\circ}}{50}$$

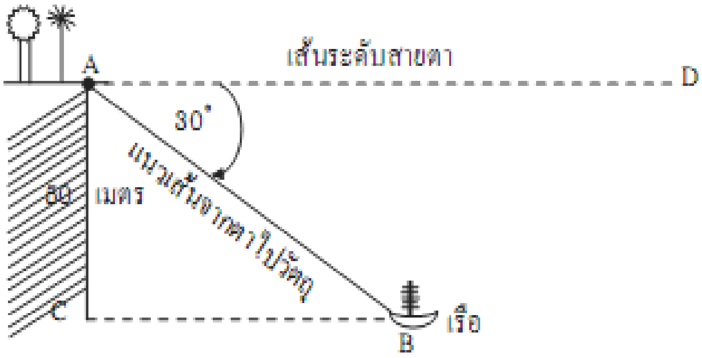
$\therefore$ ความยาวของด้านประชิดมุม $60^{o} = \dfrac{50\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$

ดังนั้น ระยะระหว่างบันไดกับกำแพงเท่ากับ $25\sqrt{3}$ ฟุต

วีดิทัศน์ เรื่อง ตัวอย่างการแก้โจทย์ปัญหา (2)

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> สมพรยืนอยู่บนหน้าผาแห่งหนึ่ง ซึ่งสูงจากระดับน้ำทะเล 50 เมตร เขามองไปยังเรือลำหนึ่งกลางทะเล เป็นมุมก้ม 30 องศา เรือลำนี้อยู่ห่างจากฝั่ง โดยประมาณกี่เมตร

<u>วิธีทำ</u>



ให้ A เป็นตำแหน่งที่สมพรยืนอยู่

AC แทนความสูงของหน้าผาจากน้ำทะเล คือ 50 เมตร

BC เป็นระยะที่เรืออยู่ห่างจากฝั่ง

เนื่องจาก AD // BC จะได้ $C\hat{B}A = D\hat{A}B = 30^{\circ}$

ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จะได้ว่า $$\tan 30^{\circ} = \frac{AC}{BC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{50}{BC}$$

$$BC = 50\sqrt{3} \approx 50 \times 1.732$$

$$BC \approx 86.6$$

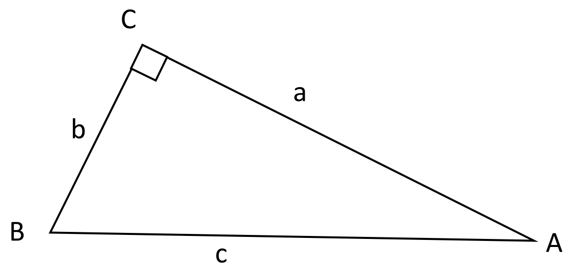
ดังนั้น เรืออยู่ห่างจากฝั่งประมาณ 87 เมตร

วีดิทัศน์ เรื่อง ตัวอย่างการแก้โจทย์ปัญหา (3)

กิจกรรมบทที่ 5

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงหาว่าอัตราส่วนตรีโกณมิติที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นค่าไซน์ (sin) หรือโคไซน์ (cos) หรือแทนเจนต์ (tan) ของมุมที่กำหนดให้



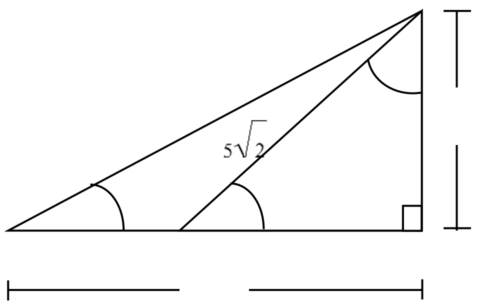
1) .... $A = \frac{b}{c}$

2) .... $A = \frac{b}{a}$

3) .... $B = \frac{a}{c}$

4) .... $B = \frac{b}{c}$

2. จงหาค่า a และ b จากรูปที่กำหนดให้



3. จงหาค่าของ

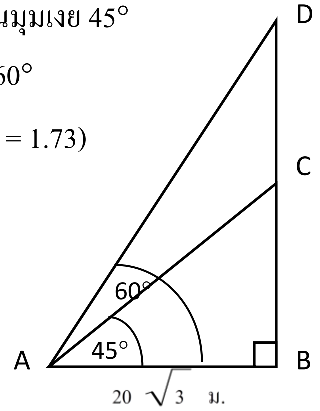
1) $\sin 30^\circ - \cos 30^\circ + \sin 60^\circ - \cos 60^\circ + \tan 45^\circ$

2) $\tan^2 45^\circ - \sin 30^\circ \cdot \operatorname{cosec}^2 60^\circ$

3) $$\frac{\sin 30^\circ \cdot \operatorname{cosec}^2 30^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sec^2 60^\circ}{\tan^2 45^\circ \cdot \sin 30^\circ}$$

4) $$\frac{\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ}{\tan^2 45^\circ} + \frac{2\cos^2 30^\circ}{\sec 60^\circ}$$

4. มานะยืนห่างจากตึก 20 เมตร มองเห็นยอดตึกเป็นมุมเงย 45° และเห็นเสาอากาศที่ตั้งอยู่บนยอดตึกเป็นมุมเงย 60° จงหาว่าเสาอากาศสูงจากตึกเท่าไร (กำหนด $\sqrt{3}$ = 1.73)



บทที่ 6

การใช้เครื่องมือและการออกแบบผลิตภัณฑ์

สาระสำคัญ

1. การเลือกใช้เครื่องมือต่างๆ ในการสร้างรูปเรขาคณิต
2. การออกแบบวัสดุหรือครุภัณฑ์ อาคารที่พักอาศัย หรืออาคารสำนักงานต่างๆ ในชีวิตประจำวันจะเกี่ยวข้องกับรูปแบบ การเลื่อนขนาน การหมุน และการสะท้อน
3. การออกแบบบรรจุภัณฑ์สินค้าที่ดี สวยงาม น่าสนใจ จะช่วยในการการเพิ่มมูลค่าของสินค้านั้นๆ ได้

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. สร้างรูปเรขาคณิตโดยใช้เครื่องมือได้
2. อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างรูปต้นแบบ และรูปที่ได้จากการเลื่อนขนาน การสะท้อนและการหมุนได้
3. นำสมบัติเกี่ยวกับการเลื่อนขนาน การหมุน และการสะท้อน จากการแปลงทางคณิตศาสตร์และทางเรขาคณิต ไปใช้ในการออกแบบ งานศิลปะได้

ขอบข่ายเนื้อหา

เรื่องที่ 1 การสร้างรูปทางเรขาคณิตโดยใช้เครื่องมือ

เรื่องที่ 2 การแปลงทางเรขาคณิต

2.1 การเลื่อนขนาน (Translation)

2.2 การหมุน (Rotation)

2.3 การสะท้อน (Reflection)

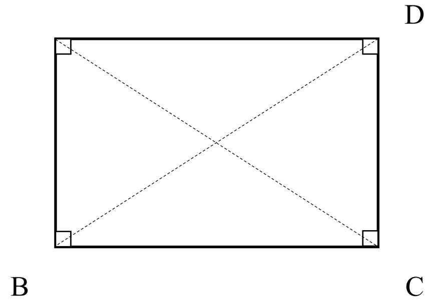
เรื่องที่ 1

การสร้างรูปเรขาคณิตโดยใช้เครื่องมือ

1.1 รูปเรขาคณิตสองมิติ สามารถสร้างได้โดยใช้สันตรง เช่น ไม้บรรทัด ฟุตเหล็ก ไม้ฉาก ไม้ที เพื่อวัดความยาว ใช้ไม้โปรแทรกเตอร์ เพื่อวัดมุม หรือขนาดของมุม ใช้วงเวียน เพื่อประกอบการสร้างเส้นโค้งที่แทนความยาวรอบวงกลม หรือช่วยในการสร้างมุมที่มีขนาดที่ต้องการ

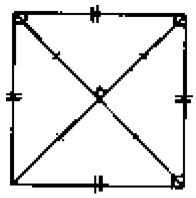
สมบัติต่าง ๆ ของรูปเรขาคณิตและความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิต

1. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า



1) มีมุมทั้งสี่เป็นมุมฉาก
2) ด้านที่อยู่ตรงข้ามกันยาวเท่ากันและขนานกันสองคู่
3) เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งกันและกัน
4) พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า = ความยาวของด้านกว้าง x ความยาวของด้านยาว
5) ความยาวรอบรูปของสี่เหลี่ยมผืนผ้า
   = (2 × ความยาวของด้านกว้าง) + (2 × ความยาวของด้านยาว)

2. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

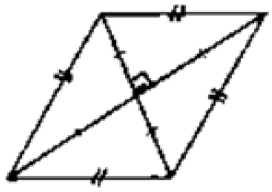


1) มุมทั้งสี่เป็นมุมฉาก
2) ด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน
3) เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่ง และตั้งฉากกันซึ่งกันและกัน
4) พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส = ความยาวด้าน × ความยาวด้าน หรือ $\frac{1}{2}\times$ ผลคูณของความยาวเส้นทแยงมุม

3. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

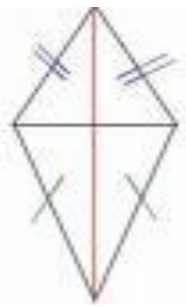
1) มีด้านตรงกันยาวเท่ากันและขนานกันสองคู่
2) เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งกันและกัน แต่ยาวไม่เท่ากัน
3) พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน = ความยาวฐาน × ส่วนสูง

4. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน



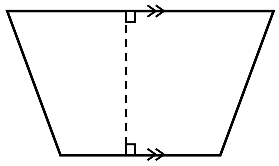
1) มีด้านตรงข้ามกันขนานกันสองคู่
2) ด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน
3) เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน และตั้งฉากกัน
4) พื้นที่รูปสามเหลี่ยมขนมเปียกปูน = ความยาวฐาน × ส่วนสูง หรือ $\frac{1}{2}\times$ ผลคูณของความยาวของเส้นทแยงมุม

5. รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว



1) มีด้านประชิดกันยาวเท่ากัน 2 คู่
2) เส้นทแยงมุมสองเส้นตั้งฉากกัน
3) เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน แต่ยาวไม่เท่ากัน
4) พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว = $\frac{1}{2}\times$ ผลคูณของความยาวของเส้นทแยงมุม

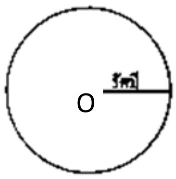
6. รูปสี่เหลี่ยมคางหมู



1) มีด้านขนานกัน 1 คู่

2) พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู = $\frac{1}{2}$ × ผลบวกของความยาวของด้านคู่ขนาน × ส่วนสูง

7. รูปวงกลม



1) ระยะทางจุดศูนย์กลางไปยังเส้นรอบวงเป็นระยะที่เท่ากันเสมอ เรียกว่า รัศมีของวงกลม (r)

2) เส้นผ่านศูนย์กลางยาวเป็น 2 เท่าของรัศมี (r)

3) พื้นที่วงกลม = πr^2

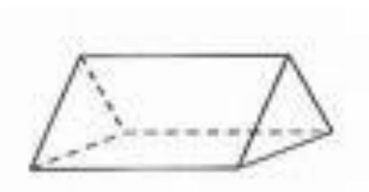
4) ความยาวเส้นรอบรูปของวงกลม $2\pi r$

วีดิทัศน์ เรื่อง รูปเรขาคณิตสองมิติ

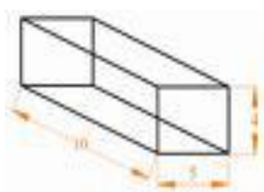
1.2 รูปเรขาคณิตสามมิติ

รูปเรขาคณิตสามมิติสามารถแสดงรูปร่างซึ่งมีทั้งความกว้าง ความยาว ความสูง หรือความหนา ตัวอย่างรูปทรงเรขาคณิตสามมิติ เช่น

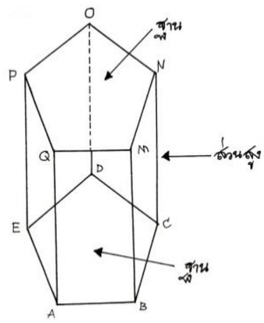
ปริซึม เป็นรูปสามมิติที่มีหน้าตัดหัวท้ายเป็นรูปเหลี่ยมเท่ากันทุกประการและขนานกันและผิวด้านข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า เช่น



ปริซึมสามเหลี่ยม

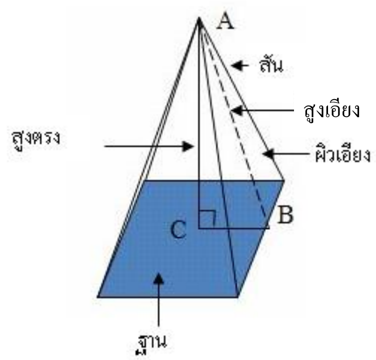


ปริซึมสี่เหลี่ยม

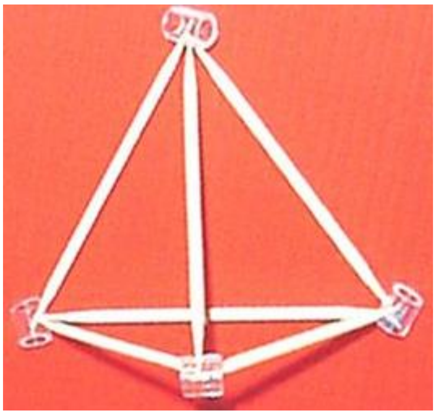


ปริซึมห้าเหลี่ยม

พีระมิด เป็นรูปเรขาคณิตสามมิติที่มียอดแหลม ผิวด้านข้างเป็นรูปสามเหลี่ยม



พีระมิดฐานสี่เหลี่ยม

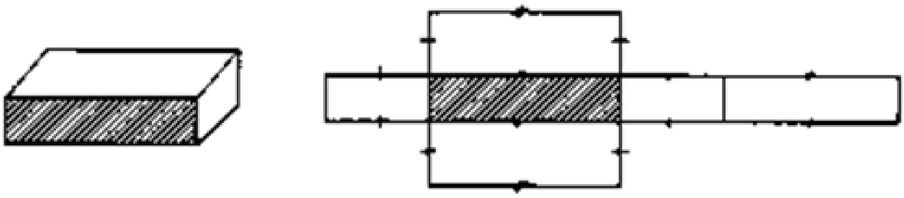


พีระมิดฐานสามเหลี่ยม

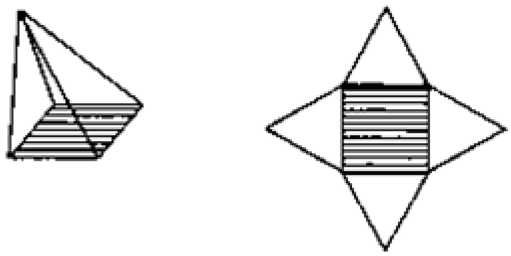
ตัวอย่างรูปเรขาคณิตสามมิติที่พบเห็นในชีวิตประจำวัน เช่น ตู้เย็น เป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก หรือปริซึมสี่เหลี่ยม กระป๋องของปลากระป๋อง เป็นรูปทรงกระบอก ไอศกรีม เป็นรูปกรวยกลม เป็นต้น

1.3 การคลี่รูปเรขาคณิตสามมิติ ภาพที่ได้จะเป็นภาพของรูปเรขาคณิตสองมิติ เช่น การคลี่รูปปริซึมทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปทรงปีระมิด

สี่เหลี่ยมมุมฉาก



การคลี่รูปพีระมิด ฐานสี่เหลี่ยม



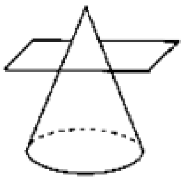
วีดิทัศน์ เรื่อง รูปเรขาคณิตสามมิติ

วีดิทัศน์ เรื่อง การคลี่รูปเรขาคณิตสามมิติ

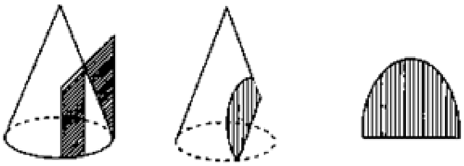
1.4 การตัดขวางรูปเรขาคณิตสามมิติ

เมื่อนำระนาบมาตัดขวางรูปทรงเรขาคณิตสามมิติในแนวต่างๆ กัน ภาพที่เกิดขึ้นจะมีลักษณะต่างๆ กัน เช่น

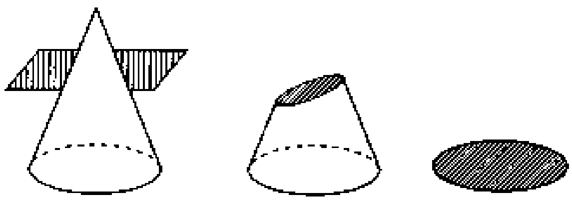
กรวยกลม เมื่อตัดด้วยระนาบในแนวขนานกับฐานกรวย จะได้ภาพสองมิติเป็นรูปวงกลม



กรวยกลม เมื่อตัดด้วยระนาบในแนวตั้งฉากกับฐานกรวย จะได้ภาพเป็นรูปพาลาโบลา

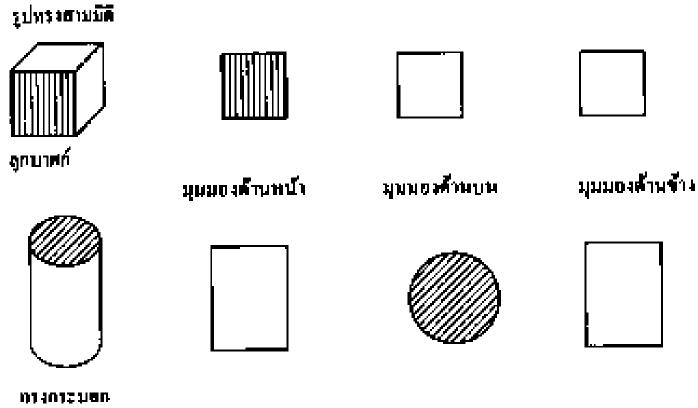


กรวยกลม เมื่อตัดด้วยระนาบที่ไม่ขนานกับฐานและไม่ตั้งฉากกับฐาน จะได้ภาพเป็นวงรี



1.5 มุมมองของรูปเรขาคณิตสามมิติ

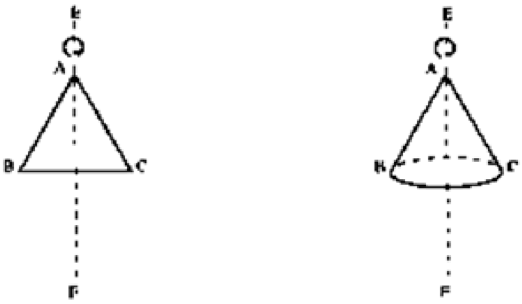
รูปเรขาคณิตที่พบเห็นในชีวิตประจำวันมีรูปร่างและสิ่งที่มองเห็นจากการเปลี่ยนมุมมองแต่ละด้านแตกต่างกัน เช่น



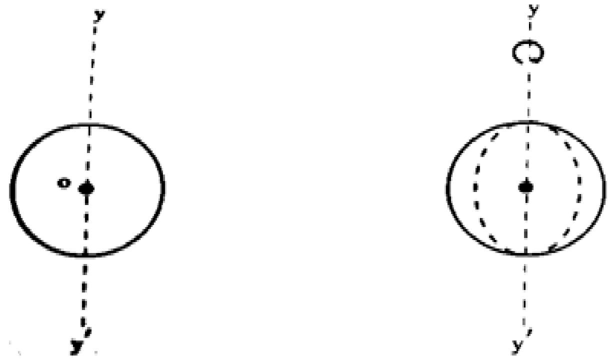
วีดิทัศน์ เรื่อง การตัดขวางและมุมมองรูปเรขาคณิตสามมิติ

1.6 รูปเรขาคณิตสามมิติที่เกิดจากการหมุนรูปเรขาคณิตสองมิติ

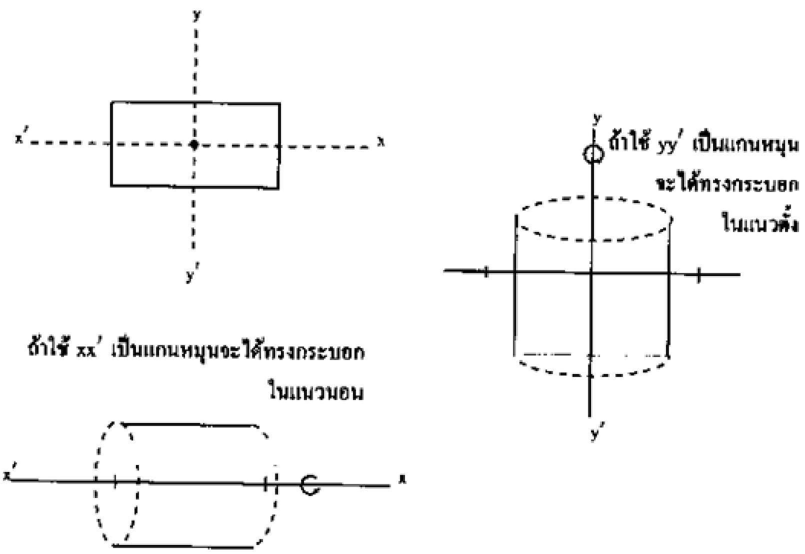
1) รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC มีแกน EF เป็นแกนสมมาตร ถ้านำรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC หมุนรอบแกนสมมาตร EF จะเห็นเป็นรูปเรขาคณิตสามมิติ “กรวยกลม”



2) แผ่นกระดาษแข็งรูปวงกลม เป็นรูปเรขาคณิตสองมิติ ถ้าใช้เส้นผ่านศูนย์กลาง yy' เป็นแกนหมุนรูปเรขาคณิตสามมิติที่เกิดจากการหมุนจะเห็นเป็นลักษณะ “ทรงกลม”



3) กระดาษรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า เป็นรูปเรขาคณิตที่มีแกนสมมาตรสองแกน



วีดิทัศน์ เรื่อง รูปเรขาคณิตสามมิติที่เกิดจากการหมุน

1.7 การเขียนภาพของรูปเรขาคณิตสามมิติ

การเขียนภาพของรูปเรขาคณิตสามมิติอย่างง่ายอาจใช้ขั้นตอนดังในตัวอย่างต่อไปนี้

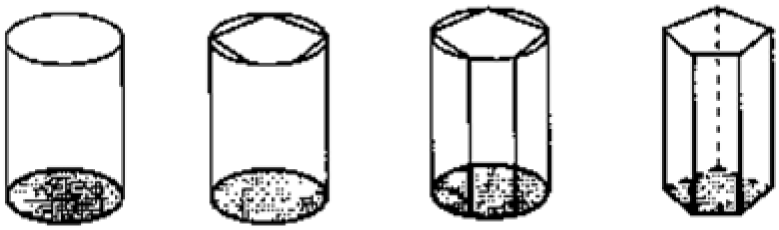
1. การเขียนภาพของทรงกระบอก

ขั้นที่ 1 ขั้นที่ 2

ขั้นที่ 1 เขียนวงรีแทนหน้าตัดที่เป็นวงกลมและเขียนส่วนของเส้นตรงสองเส้น แสดงส่วนสูงของทรงกระบอก ดังรูป

ขั้นที่ 2 เขียนวงรีที่มีขนาดเท่ากับวงรีที่ใช้ในขั้นที่ 1 แทนวงกลมซึ่งเป็นฐานของทรงกระบอกและเขียนเส้นประแทนเส้นทึบตรงส่วนที่ถูกบัง

2. การเขียนภาพของปริซึม



ขั้นที่ 1 ขั้นที่ 2 ขั้นที่ 3 ขั้นที่ 4

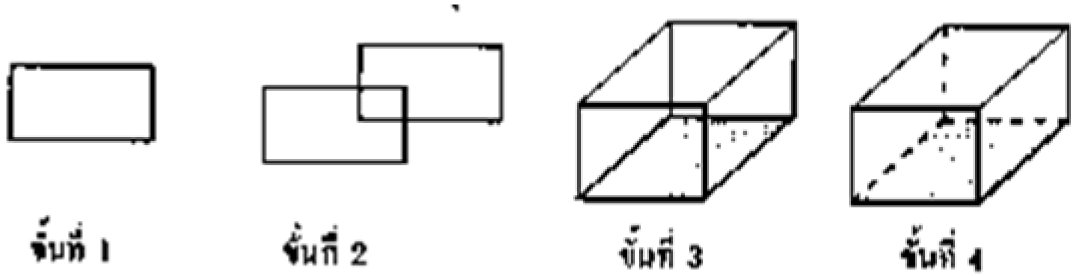
ขั้นที่ 1 เขียนทรงกระบอกตามวิธีการข้างต้น

ขั้นที่ 2 กำหนดจุดบนวงรีด้านบนเพื่อใช้เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมที่เป็นฐานของปริซึมตามต้องการแล้วลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมต่อจุดเหล่านั้น

ขั้นที่ 3 เขียนส่วนสูงของปริซึมจากจุดยอดของรูปเหลี่ยมที่ได้ในขั้นที่ 2 มาตั้งฉากกับวงรีด้านล่าง

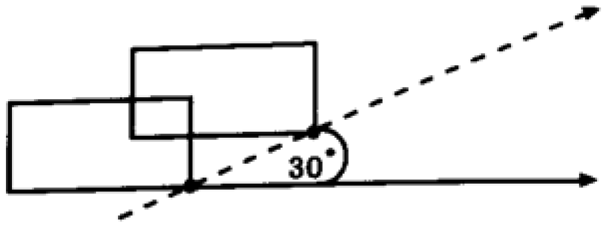
ขั้นที่ 4 เขียนส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดบนวงรีที่ได้ในขั้นที่ 3 และลบรอยส่วนโค้งของวงรี จะได้รูปหลายเหลี่ยมที่เป็นฐานของปริซึม แล้วเขียนเส้นประแทนด้านที่ถูกบัง

3. การเขียนภาพของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก



ขั้นที่ 1 เขียนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูป

ขั้นที่ 2 เขียนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาดเท่ากันกับรูปในขั้นที่ 1 อีก 1 รูป ให้อยู่ในลักษณะที่ขนานกันและเหลื่อมกันประมาณ 30 องศา ดังรูป

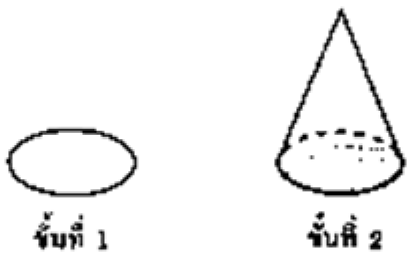


ขั้นที่ 3 ลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมต่อจุดให้ได้ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

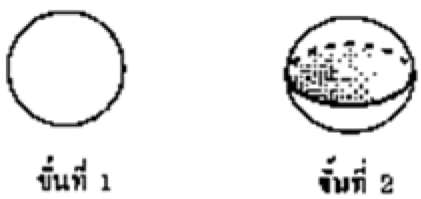
ขั้นที่ 4 เขียนเส้นประแทนด้านที่ถูกบัง

สำหรับการเขียนภาพของกรวย ทรงกลม และพีระมิดก็สามารถเขียนได้โดยใช้วิธีการเดียวกันกับข้างต้นซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

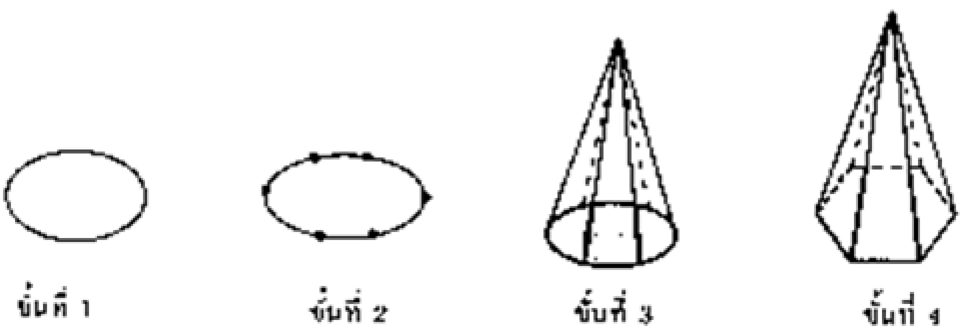
4. การเขียนภาพของกรวย



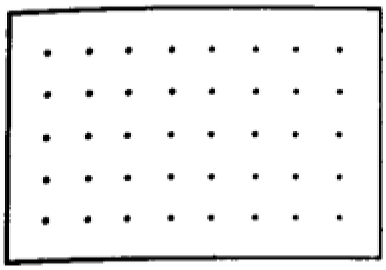
5. การเขียนภาพของทรงกลม



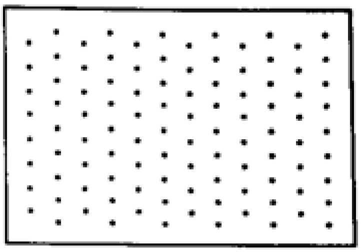
6. การเขียนภาพของพีระมิดฐานหกเหลี่ยม



นอกจากจะใช้วิธีการดังกล่าวข้างต้นในการเขียนภาพของรูปเรขาคณิตสามมิติแล้ว อาจใช้กระดาษที่มีจุดเหมือนกระดานตะปู (Geoboard) หรือกระดาษจุดไอโซเมตริก (Isometric dot paper) ช่วยในการเขียนภาพนั้นๆ

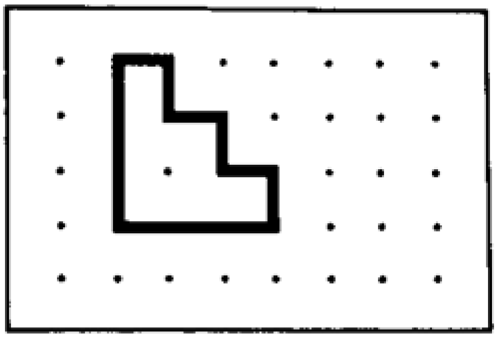


กระดาษที่มีจุดเหมือนกระดานตะปู



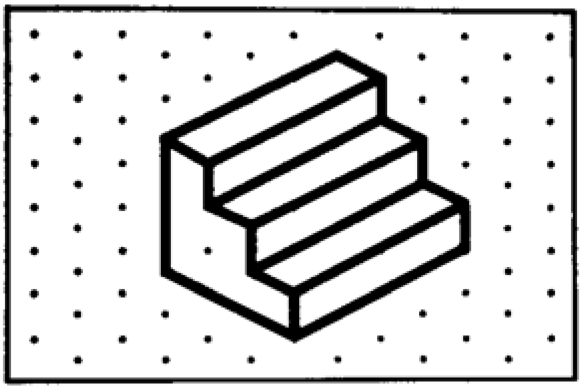
กระดาษจุดไอโซเมตริก

การเขียนภาพของรูปเรขาคณิตสองมิติบนกระดาษที่มีจุดเหมือนกระดานตะปู ดังตัวอย่าง



นอกจากนี้ยังนิยมเขียนภาพของรูปเรขาคณิตสามมิติบนกระดาษจุดไอโซเมตริก ภาพของรูปเรขาคณิตสามมิติที่เขียนอยู่ในลักษณะนี้เรียกว่า ภาพแบบไอโซเมตริก

การเขียนภาพแบบไอโซเมตริกบนกระดาษจุดไอโซเมตริกจะเขียนส่วนของเส้นตรงที่เป็นด้านกว้าง ด้านยาว ตามแนวของจุดซึ่งเอียงทำมุมขนาด 30 องศา กับแนวนอนและเขียนส่วนของเส้นตรงที่เป็นส่วนสูงตามแนวของจุดในแนวตั้ง ดังตัวอย่าง



วีดิทัศน์ เรื่อง การเขียนภาพของรูปเรขาคณิตสามมิติ

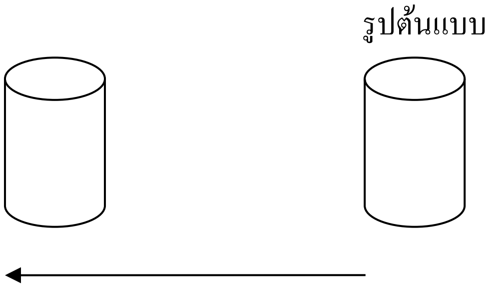
เรื่องที่ 2

การแปลงทางเรขาคณิต

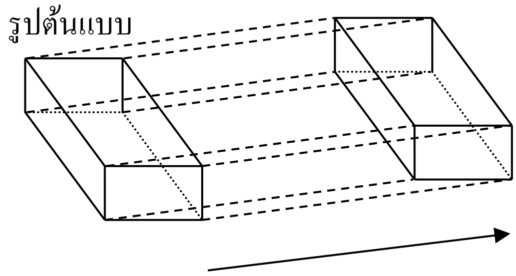
เป็นคำศัพท์ที่ใช้เรียกการดำเนินการใดๆทางเรขาคณิต ทั้งในสองมิติและสามมิติ เช่น การเลื่อนขนาน การหมุน การสะท้อน

2.1 การเลื่อนขนาน (Translation)

การเลื่อนขนานต้องมีรูปต้นแบบ ทิศทางและระยะทางที่ต้องการเลื่อนรูป การเลื่อนขนานเป็นการแปลงที่จับคู่จุดแต่ละจุดของรูปต้นแบบกับจุดแต่ละจุดของรูปที่ได้จากการเลื่อนรูปต้นแบบไปในทิศทางใดทิศทางหนึ่งด้วยระยะทางที่กำหนด จุดแต่ละจุดบนรูปที่ได้จากการเลื่อนขนานจะห่างจากจุดที่สมนัยกันบนรูปต้นแบบเป็นระยะทางเท่ากัน การเลื่อนในลักษณะนี้เรียกอีกอย่างหนึ่งว่า “สไลด์ (slide)” ดังตัวอย่างในภาพที่ 1 และภาพที่ 2



ภาพที่ 1



ภาพที่ 2

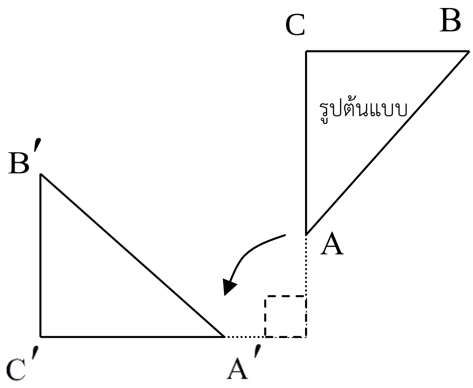
วีดิทัศน์ เรื่อง การเลื่อนขนาน

2.2 การหมุน (Rotation)

การหมุนจะต้องมีรูปต้นแบบ จุดหมุนและขนาดของมุมที่ต้องการในรูปนั้น การหมุนเป็นการแปลงที่จับคู่จุดแต่ละจุดของรูปต้นแบบกับจุดแต่ละจุดของรูปที่ได้จากการหมุน โดยที่จุดแต่ละจุดบนรูปต้นแบบเคลื่อนที่รอบจุดหมุนด้วยขนาดของมุมที่กำหนด จุดหมุนจะเป็นจุดที่อยู่นอกรูปหรือบนรูปก็ได้ การหมุนจะหมุนทวนเข็มนาฬิกาหรือตามเข็มนาฬิกาก็ได้ โดยทั่วไปเมื่อไม่ระบุไว้การหมุนรูปจะเป็นการหมุนทวนเข็มนาฬิกา

บางครั้งถ้าการหมุนตามเข็มนาฬิกา อาจใช้สัญลักษณ์ $-x^{\circ}$

หรือ ถ้าการหมุนทวนเข็มนาฬิกา อาจใช้สัญลักษณ์ x°



จากรูป เป็นการหมุนรูปสามเหลี่ยม ABC ในลักษณะทวนเข็มนาฬิกา โดยมีจุด O เป็นจุดหมุน ซึ่งจุดหมุนเป็นจุดที่อยู่นอกรูปสามเหลี่ยม ABCรูป $A'B'C'$ เป็นรูปที่ได้จากการหมุน 90° และจะได้ว่า ขนาดของมุม AOA' เท่ากับ 90° BOB' เท่ากับ 90° และ COC' เท่ากับ 90°

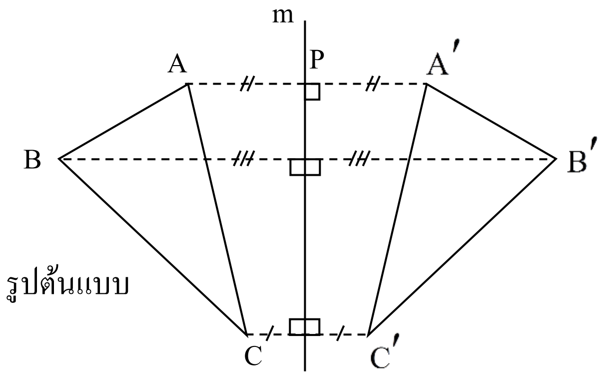
2.3 การสะท้อน (Reflection)

การสะท้อนต้องมีรูปต้นแบบที่ต้องการสะท้อนและเส้นสะท้อน (Reflection line หรือ Mirror line) การสะท้อนรูปข้ามเส้นสะท้อนเสมือนกับการพลิกรูปข้ามเส้นสะท้อนหรือการดูเงาสะท้อนบนกระจกเงาที่วางบนเส้นสะท้อน การสะท้อนเป็นการแปลงที่มีการจับคู่กันระหว่างจุด แต่ละจุดบนรูปต้นแบบกับจุดแต่ละจุดบนรูปสะท้อน โดยที่

1. รูปที่เกิดจากการสะท้อนมีขนาดและรูปร่างเช่นเดิม หรือกล่าวว่ารูปที่เกิดจากการสะท้อนเท่ากันทุกประการกับรูปเดิม O

2. เส้นสะท้อนจะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดแต่ละจุดบนรูปต้นแบบกับจุดแต่ละจุดบนรูปสะท้อนที่สมนัยกัน นั่นคือระยะระหว่างจุดต้นแบบและเส้นสะท้อนเท่ากับระยะระหว่างจุดสะท้อนและเส้นสะท้อน

ตัวอย่าง



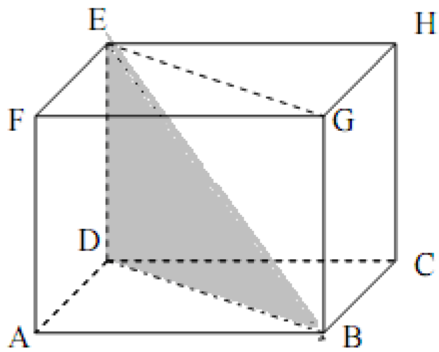
จากรูป รูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ เป็นรูปสะท้อนของรูปสามเหลี่ยม ABC ข้ามเส้นสะท้อน m รูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ ส่วนของเส้นตรง AA' ตั้งฉากกับเส้นสะท้อน m ที่จุด P และระยะจากจุด A ถึงเส้น m เท่ากับระยะจากเส้น m ถึงจุด A' ($AP = PA'$)

วีดิทัศน์ เรื่อง การสะท้อน

กิจกรรมบทที่ 6

แบบฝึกหัดที่ 1

1. กำหนดมุมในรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากดังรูป



ก. รูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมชนิดใด

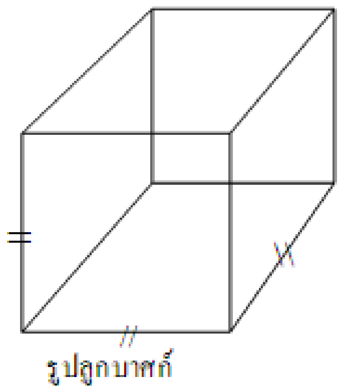
ข. $B\hat{D}E$ มีขนาดกี่องศา

ค. รูปสี่เหลี่ยม BDEG เกิดจากการใช้ระนาบตัดทรงรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตามแนวใด

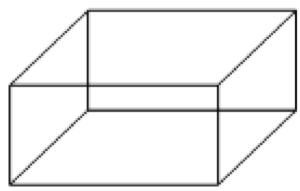
ง. รูปสามเหลี่ยม BDE เกี่ยวข้องกับ รูปสี่เหลี่ยม BDEG อย่างไร

2. จงเขียนรูปคลี่ของทรงสามมิติต่อไปนี้

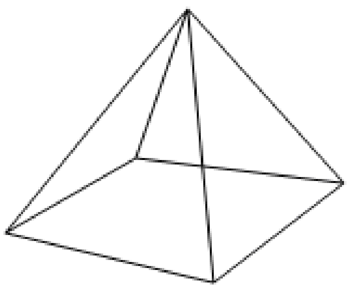
(1)



(2)



(3)



ดูเฉลยกิจกรรมท้ายบท

บทที่ 7
สถิติเบื้องต้น

สาระสำคัญ

1. ข้อมูลสถิติ หมายถึง ตัวเลขหรือข้อความที่แทนข้อเท็จจริงของลักษณะที่เราสนใจ
2. ระเบียบวิธีการทางสถิติ จะประกอบไปด้วย การเก็บรวบรวมข้อมูล การนำเสนอข้อมูล การวิเคราะห์และการตีความของข้อมูล
3. การเก็บรวบรวมข้อมูล หมายถึง กระบวนการกระทำเพื่อจะให้ได้ข้อมูลที่ต้องการศึกษาภายใต้ขอบเขตที่กำหนด
4. การนำเสนอข้อมูลที่เก็บรวบรวมมา จะมี 2 แบบ คือ การนำเสนออย่างเป็นแบบแผนและการนำเสนออย่างไม่เป็นแบบแผน
5. การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง เป็นการหาค่ากลางด้วยวิธีต่าง ๆ กัน เพื่อใช้เป็นตัวแทนของข้อมูลทั้งชุด ค่ากลางที่นิยมใช้มี 3 วิธี ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่ามัธยฐานและค่าฐานนิยม

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. อธิบายขั้นตอนการวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น และสามารถนำผลการวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้นไปใช้ในการตัดสินใจได้
2. เลือกใช้ค่ากลางที่เหมาะสมกับข้อมูลที่กำหนดและวัตถุประสงค์ที่ต้องการได้
3. นำเสนอข้อมูลในรูปแบบต่างๆรวมทั้งการอ่านและตีความหมายจากการนำเสนอข้อมูลได้

ขอบข่ายเนื้อหา

เรื่องที่ 1 การวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น

เรื่องที่ 2 การหาค่ากลางของข้อมูลโดยใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐานและฐานนิยม

เรื่องที่ 3 การนำเสนอข้อมูล

เรื่องที่ 1
การวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น

สถิต (Statistics) มีความหมาย 2 อย่าง คือ

1) สถิต หมายถึง ค่าที่ได้จากการประมวลจากข้อมูลเบื้องต้นในลักษณะ สรุปรวบยอด ใช้เป็นตัวแทนของชุดข้อมูล

2) สถิติ หมายถึง ระเบียบวิธีการที่เกี่ยวข้องกับการจัดกระทำข้อมูลเริ่มตั้งแต่ การเก็บรวบรวมข้อมูล การนำเสนอข้อมูล การวิเคราะห์ข้อมูล และการตีความหรือแปลความหมายข้อมูล

การจำแนกชนิดของข้อมูล มีดังนี้

1) ข้อมูลเชิงคุณภาพ เป็นข้อมูลที่แสดงถึง คุณสมบัติ สภาพ สถานะ หรือความคิดเห็น เช่น ความสวย ระดับการศึกษา เพศ อาชีพ เป็นต้น

2) ข้อมูลเชิงปริมาณ เป็น ข้อมูลที่แสดงจำนวนมากหรือน้อย เป็นตัวเลข เช่นข้อมูลที่เกิดจากการชั่งตวง วัด ซึ่งค่าของข้อมูลที่นำปริมาณมาเปรียบเทียบกันได้ เช่น ความยาว น้ำหนัก ส่วนสูง

3) ข้อมูลจำแนกตามเวลา เป็นข้อมูลที่แสดงข้อเท็จจริงตามช่วงระยะเวลาต่างๆ

4) ข้อมูลจำแนกตามภูมิศาสตร์ เป็นข้อมูลแยกตามสภาพท้องถิ่น เช่น แยกตามจังหวัด

การเก็บรวบรวมข้อมูล จำแนกการเก็บจากแหล่งที่มาของข้อมูล มี 2 ประเภท คือ

1) ข้อมูลปฐมภูมิ (Primary data) หมายถึง ข้อมูลที่รวบรวมมาจากผู้ให้หรือแหล่งที่เป็นข้อมูลโดยตรง เช่น การสำรวจนับจำนวนพนักงานในบริษัทแห่งหนึ่ง เป็นต้น มีวิธีเก็บรวบรวมดังนี้

(1) การสัมภาษณ์

(2) การสอบถามทางไปรษณีย์

(3) การสอบถามทางโทรศัพท์

(4) การสังเกต

(5) การทดลอง

2) ข้อมูลทุติยภูมิ (Secondary data) หมายถึง ข้อมูลที่รวบรวมหรือเก็บมาจากแหล่งข้อมูลที่มีการรวบรวมไว้แล้ว เช่น การคัดลอกจำนวนสินค้าส่งออกที่การท่าเรือได้รวบรวมไว้

อนึ่ง การเก็บรวบรวมข้อมูล ถ้าเราเลือกมาจากจำนวนหรือรายการของข้อมูลที่ต้องการเก็บมาทั้งหมดทุกหน่วยจะเรียกว่า "ประชากร" (Population) แต่ถ้าเราเลือกมาเป็นบางหน่วยและเป็นตัวแทนของประชากรนั้น ๆ เราจะเรียกว่า "กลุ่มตัวอย่าง" หรือ "ตัวอย่าง" (Sample)

วีดิทัศน์ เรื่อง สถิติเบื้องต้น

การวิเคราะห์ข้อมูล มีดังนี้

1) สถิติเชิงพรรณนา เป็นการวิเคราะห์ขั้นต้น มุ่งวิเคราะห์เพื่ออธิบายลักษณะกว้างๆของข้อมูลชุดนั้นๆ

2) สถิติเชิงอนุมาน เป็นการวิเตราะห์ข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้จากตัวอย่าง เพื่ออ้างอิงไปยังข้อมูลทั้งหมด

ตารางแจกแจงความถี่

ตัวอย่าง จากตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนสอบของนักเรียน 40 คน ดังนี้

อันตรภาคชั้น (คะแนน)	ความถี่ (f)	ความถี่สะสม	จุดกลางชั้น (x_i)	ขีดจำกัดล่าง	ขีดจำกัดบน
11 – 20	7	7	15.5	10.5	20.5
21 – 30	6	13	25.5	20.5	30.5
31 – 40	8	21	35.5	30.5	40.5
41 – 50	15	36	45.5	40.5	50.5
51 - 60	4	40	55.5	50.5	60.5

ความหมายของค่าต่างๆ ในตารางแจกแจงความถี่ที่เป็นอันตรภาคชั้น มีดังนี้

1) อันตรภาคชั้น (Class interval) หมายถึง ข้อมูลที่แบ่งออกเป็นช่วงๆ เช่น อันตรภาคชั้น 11-20, 21 -30 ,61–70 ,81-90 เป็นต้น

2) ความกว้างของอันตรภาคชั้น หมายถึง ความกว้าง 1 ช่วงของข้อมูลในแต่ละชั้น จาก 11-20 มีความกว้าง เท่ากับ 10

3) จำนวนของอันตรภาคชั้น หมายถึง จำนวนช่วงชั้นทั้งหมดที่ได้แจกแจงไว้ในที่นี้ มี 5 ชั้น

4) ความถี่ (Frequency) หมายถึง รอยขีดที่ซ้ำกัน หรือจำนวนข้อมูลที่ซ้ำกันในอันตรภาคชั้นนั้น ๆ เช่น อันตรภาคชั้น 41-50 มีความถี่เท่ากับ 15 หรือมีนักเรียนที่ได้คะแนนในช่วง 41-50 มีอยู่ 15 คน

5) ความถี่สะสม เป็นผลรวมของความถี่ของอันตรภาคชั้นนั้น กับความถี่ของอันตรภาคชั้นที่มีช่วงคะแนนต่ำกว่าทั้งหมด

6) จุดกลางชั้น เป็นค่าที่อยู่ระหว่างกลางของอันตรภาคชั้น เช่น อันตรภาคชั้น 11 - 20 มีจุดกลางชั้นเท่ากับ $\frac{11+20}{2} = 15.5$

วีดิทัศน์ เรื่อง ตารางแจกแจงความถี่

เรื่องที่ 2

การหาค่ากลางของข้อมูล โดยใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยม

ค่ากลางของข้อมูลเป็นค่าสถิติที่ได้จากการวิเคราะห์ข้อมูลแต่ละชุด ค่ากลางของข้อมูลจึงเป็นตัวแทนของข้อมูลในแต่ละชุด ค่ากลางของข้อมูลที่สำคัญมี 3 ชนิด คือ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยม

ข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Arithmetic mean) คือ ผลบวกของข้อมูลทั้งหมดหารด้วยจำนวนข้อมูล

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$ เมื่อ n แทนจำนวนข้อมูล

2. มัธยฐาน (Median) คือ ค่าที่มีตำแหน่งอยู่กึ่งกลางของข้อมูลทั้งหมด เมื่อได้เรียงข้อมูลตามลำดับ

ขั้นตอนการหามัธยฐาน

1) เรียงข้อมูลที่มีอยู่ทั้งหมดจากน้อยไปมาก หรือมากไปน้อยก็ได้

2) ตำแหน่งมัธยฐาน คือ ตำแหน่งกึ่งกลางข้อมูลทั้งหมด ดังนั้นตำแหน่งของมัธยฐาน = $\frac{n+1}{2}$

เมื่อ n คือ จำนวนข้อมูลทั้งหมด

3. ฐานนิยม (Mode) คือ ค่าของข้อมูลที่มีความถี่สูงสุด หรือค่าที่มีจำนวนซ้ำๆ กันมากที่สุด

ขยายความ

1) กรณีที่ข้อมูลที่มีความถี่มากที่สุดเท่ากัน 2 ค่า ฐานนิยมคือค่าสังเกต 2 ค่านั้น

2) กรณีที่ข้อมูลมีความถี่เท่ากันจะไม่มีฐานนิยม

ตัวอย่าง หาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ฐานนิยม และมัธยฐานของข้อมูลต่อไปนี้

5 , 8 , 6 , 8 , 9 , 9 , 10 , 9 , 15 , 11

วิธีทำ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$= \frac{5+8+6+8+9+9+10+9+15+11}{10} = \frac{90}{10} = 9$$

$\therefore$ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คือ 9

ค่ามัธยฐาน

1) เรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก ดังนี้

5 , 7 , 8 , 8 , 9 , 9 , 9 , 10 , 11 , 15

2) ตำแหน่งมัธยฐาน $= \dfrac{n+1}{2} = \dfrac{10+1}{2} = 5.5$ (จำนวนข้อมูลทั้งหมด n = 10)

ตำแหน่งที่ 5.5 คือ ระหว่างข้อมูลตั้วที่ 5 และตัวที่ 6 คือ 9 กับ 9

$\therefore$ มัธยฐาน คือ 9

ฐานนิยม คือข้อมูลที่มีความถี่มากที่สุด = 9

$\therefore$ ฐานนิยม คือ 9

ตัวอย่าง คะแนนสอบของนักเรียนห้องหนึ่งปรากฏดังตาราง

คะแนน	10	12	15	18	20
จำนวน	2	4	6	5	3

จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยม

วิธีทำ จำนวนนักเรียน 2 + 4 + 6 + 5 + 3 = 20 คน

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

$$\bar{x} = \frac{(10)(2)+(12)(4)+(15)(6)+(18)(5)+(20)(3)}{20}$$

$= 15.40$

$\therefore$ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คือ 15.40 คะแนน

ค่ามัธยฐาน

1) ตำแหน่งมัธยฐาน $= \dfrac{n+1}{2} = \dfrac{20+1}{2} = 10.5$

2) อยู่ระหว่างคนที่ 10 กับ 11 = 15คะแนน

$\therefore$ ค่ามัธยฐาน คือ 15 คะแนน

ฐานนิยม

ข้อมูลที่ซ้ำมากที่สุดคือ 6 คน

$\therefore$ ฐานนิยม คือ 15 คะแนน

วีดิทัศน์ เรื่อง การหาค่ากลางของข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่

ข้อมูลที่มีการแจกแจงความถี่เป็นอันตรภาคชั้น

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_1}{N}$$

เมื่อ k คือ จำนวนอันตรภาคชั้น

x_1 คือ จุดกึ่งกลางของแต่ละอันตรภาคชั้น

f_1 คือ ความถี่ของแต่ละอันตรภาคชั้น

N คือ จำนวนข้อมูลทั้งหมด

2. มัธยฐาน (Median)

ขั้นตอนการหามัธยฐาน

1) สร้างตารางแจกแจงความถี่สะสม

2) ค่ามัธยฐานอยู่ตำแหน่งที่ $= \dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i}{2}$

3) หาค่ามัธยฐานด้วยสูตร

$$Me = L + I\left(\frac{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_1}{2} - \sum f_L}{f_m}\right)$$

เมื่อ L คือ ขอบล่างของอันตรภาคชั้นที่มีมัธยฐาน

I คือ ความกว้างของอันตรภาค

f_m คือ ความถี่ของชั้นที่มีมัธยฐานอยู่

$\sum f_L$ คือ ความถี่สะสมของชั้นที่อยู่ต่ำกว่าชั้นที่มัธยฐานอยู่ 1 ชั้น

3. ฐานนิยม (Mode)

สามารถหาฐานนิยมจากสูตร (ข้อมูลต้องมีความกว้างของอันตรภาคชั้นเท่ากัน)

$$Mo = L + I\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

เมื่อ L คือ ขอบล่างของอันตรภาคชั้นที่มีความถี่มากสุด

I คือ ความกว้างของอันตรภาคชั้น

d_1 คือ ผลต่างของความถี่สูงสุดกับความถี่ชั้นที่มีคะแนนต่ำกว่าที่อยู่ติดกัน

d_2 คือ ผลต่างของความถี่สูงสุดกับความถี่ของชั้นที่มีคะแนนสูงกว่าที่อยู่ติดกัน

ตัวอย่าง กำหนดตางรางแจกแจงความถี่ของข้อมูล

จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยม

คะแนน	ความถี่
34 – 36	4
37 – 39	3
40 – 42	6
43 – 45	10
46 – 48	2

วิธีทำ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

คะแนน	ความถี่ (f_1)	ความถี่สะสม	จุดกึ่งกลาง (x_1)	(f_1) (x_1)
34 – 36	4	4	35	140
37 – 39	3	7	38	114
40 – 42	6	13	41	246
43 – 45	10	23	44	440
46 – 48	2	25	47	94
	25			1,034

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_1}{N} = \frac{140 + 114 + 246 + 440 + 94}{25} = \frac{1034}{25}$$

$$= 41.36$$

มัธยฐาน

$$\text{ตำแหน่งของมัธยฐานคือ} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i}{N}$$

$$= \frac{8 + 3 + 6 + 10 + 2}{2} = \frac{25}{2} = 12.5$$

ข้อมูลตัวที่ 12.5 อยู่ในอันตรภาคชั้นที่มีคะแนน 40 – 42

ดังนั้น $L = 39.5$, $I = 3$, $f_m = 6$

$$Me = L + I\left(\frac{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i}{2} - \sum f_L}{f_m}\right)$$

$$= 39.5 + 3\left(\frac{12.5 - 7}{6}\right)$$

$$= 39.5 + 2.75 = 42.45$$

ฐานนิยม

ตำแหน่งของฐานนิยมอยู่ในอันตรภาคชั้นที่มีคะแนน 43 – 45

ดังนั้น $L = 42.5$, $I = 3$

$$d_1 = 10 - 6 = 4$$

$$d_2 = 10 - 2 = 8$$

$$Mo = L + I\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

$$= 42.5 + 3\left(\frac{4}{4+8}\right)$$

$$= 42.5 + 3\left(\frac{4}{12}\right) = 43.5$$

วีดิทัศน์ เรื่อง การหา ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ของข้อมูลที่มีการแจกแจงความถี่

วีดิทัศน์ เรื่อง การหา ค่ามัธยฐาน ของข้อมูลที่มีการแจกแจงความถี่

วีดิทัศน์ เรื่อง การหา ค่าฐานนิยม ของข้อมูลที่มีการแจกแจงความถี่

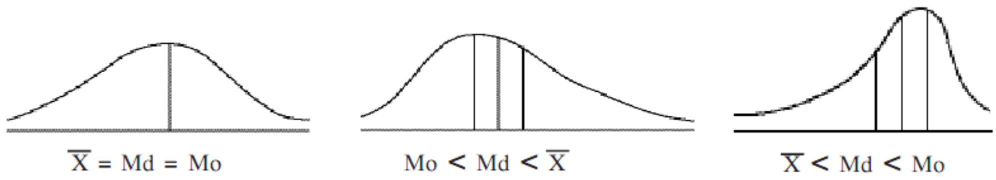
วีดิทัศน์ เรื่อง การหา ค่าฐานนิยม ของข้อมูลที่ไม่มีการแจกแจงความถี่

ความสัมพันธ์ระหว่างค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยม

นักสถิติพยายามหาความสัมพันธ์ระหว่างค่ากลางทั้งสาม

ฐานนิยม = ตัวกลางเลขคณิต – 3 (ตัวกลางเลขคณิต – มัธยฐาน) หรือ Mo = $\bar{x} - 3(\bar{x} - Md)$

ถ้าแสดงด้วยเส้นโค้งความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงความถี่ค่ากลาง และการกระจายของข้อมูล ได้ดังนี้



ข้อมูลมีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ ข้อมูลมีการแจกแจงเบ้ขวา ข้อมูลมีการแจกแจงเบ้ซ้าย

วีดิทัศน์ เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างค่าเฉลี่ยเลขคณิต ฐานนิยม และมัธยฐาน

เรื่องที่ 3
การนำเสนอข้อมูลสถิติ

การนำเสนอข้อมูลสถิติแบ่งเป็น 2 ลักษณะใหญ่ๆ คือ การนำเสนออย่างเป็นและไม่เป็นแบบแผน

การนำเสนออย่างไม่เป็นแบบแผน เป็นการนำเสนอข้อมูลที่ไม่จำเป็นต้องมีกฎเกณฑ์อะไรมากนัก ประกอบด้วย การนำเสนอในรูปบทความและการนำเสนอในรูปข้อความกึ่งตาราง

การนำเสนออย่างเป็นแบบแผน เป็นการนำเสนอข้อมูลที่มีกฎเกณฑ์และมาตรฐานที่กำหนดไว้เป็นแบบแผน ซึ่งอยู่ในลักษณะของตาราง แผนภูมิ แผนภาพ และกราฟต่างๆ

1) การนำเสนอโดยใช้ตาราง เป็นการนำเสนอข้อมูลที่เป็นที่นิยมกันแพร่หลายเพราะสะดวกและเข้าใจง่าย ใช้ได้กับข้อมูลที่หลากหลาย กะทัดรัดและสะดวกต่อการวิเคราะห์ โดยกานำข้อมูลมาจัดเรียงให้อยู่ในรูปแถว (row) หรือสดมภ์ (column)

แถว หมายถึง การเรียงตามแนวนอน และ สดมภ์ หมายถึง การเรียงตามแนวตั้ง

องค์ประกอบตารางสถิติโดยทั่วไปประกอบด้วยผังดังต่อไปนี้

1. หมายเลขตาราง (table number) ชื่อเรื่อง (title)

หมายเหตุ (prefatory note)

หัวขั้ว (Stub head)	**หัวสดมภ์ (Column head)**
ตัวขั้ว (stub entries)	**ตัวเรื่อง (body)**

หมายเหตุล่าง (footnote)

หมายเหตุแหล่งที่มา (source note)

ตัวอย่าง ตารางแสดงจำนวนประชากรของประเทศไทยปีต่างๆ จำแนกตามเพศ **(สำนักงานสถิติแห่งชาติ)**

พ.ศ.	**จำนวนประชากร**		
	ชาย	**หญิง**	**รวม**
2503	**13,154,149**	**13,103,767**	**26,257,916**
2513	**17,123,862**	**17,273,512**	**34,397,374**
2523	**22,008,063**	**22,170,074**	**44,278,137**

ขยายความ

1. หมายเลขตาราง เป็นตัวเลขที่แสดงลำดับที่ของตาราง ใช้ในกรณีที่นำเสนอมากกว่าหนึ่งตาราง

2. ชื่อเรื่อง เป็นข้อความที่อยู่ต่อจากหมายเลขตาราง ชื่อเรื่องที่ใช้ แสดงว่าเป็นเรื่องเกี่ยวกับอะไร ที่ไหน เมื่อไร

3. หมายเหตุคำนำ เป็นข้อความที่อยู่ใต้ชื่อเรื่อง เป็นส่วนที่ช่วยให้รายละเอียดในตารางมีความชัดเจนยิ่งขึ้น

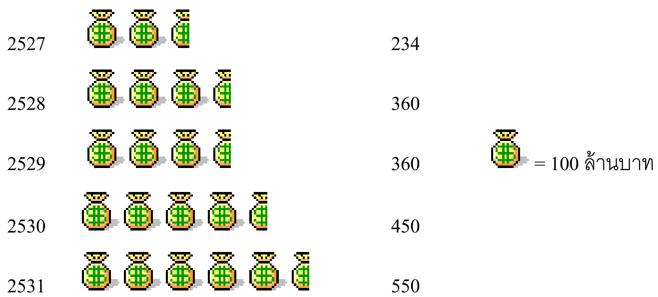
4. ต้นขั้ว ประกอบด้วย หัวขั้ว และต้นขั้ว ซึ่งหัวขั้วจะอธิบายเกี่ยวกับ ตัวขั้ว ส่วนตัวขั้ว จะแสดงข้อมูลที่อยู่ในแนวนอน ในที่นี้หัวขั้วคือ พ.ศ.

5. หัวเรื่อง ประกอบด้วย หัวสดมภ์ และตัวเรื่อง ซึ่งหัวสดมภ์ใช้อธิบายข้อมูลแต่ละสดมภ์ ตามแนวตั้งตัวเรื่องประกอบด้วย ข้อมูลที่เป็นตัวเลขโดยส่วนใหญ่ ในที่นี้หัวสดมภ์ คือ ชาย , หญิง , รวม

6. หมายเหตุแหล่งที่มา บอกให้ทราบว่าข้อมูลในตารางมาจากที่ใด ช่วยให้ผู้อ่านได้ค้นคว้าเพิ่มเติม

2) แผนภูมิรูปภาพ (Pictogram) เป็นแผนภูมิที่ใช้รูปภาพแทนจำนวนของข้อมูล รูปการนำเสนอข้อมูลในรูปภาพทำให้ดึงดูดความสนใจมากขึ้น ดังตัวอย่าง

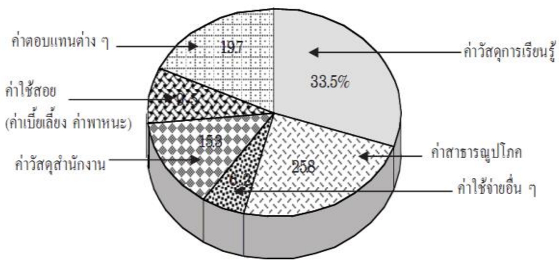
แผนภูมิรูปภาพ ซึ่งแสดงปริมาณที่ไทยส่งสินค้าออกไปขายยังประเทศบรูไนระหว่างปี 2527-2531



ที่มา : กรมศุลกากร

3) แผนภูมิรูปวงกลม คือ แผนภูมิที่แสดงเป็นรูปวงกลม โดยใช้พื้นที่วงกลมบอกปริมาณของข้อมูล โดยแบ่งรูปวงกลมออกเป็นส่วนๆ จากจุดศูนย์กลางของรูปวงกลมตามชนิดของข้อมูล และเขียนปริมาณของข้อมูลคิดเป็นเปอร์เซ็นต์ ซึ่งให้พื้นที่วงกลมเปป็นปริมาณ 100 เปอร์เซ็นต์ ดังตัวอย่าง

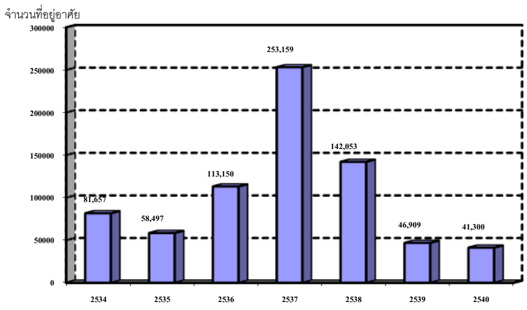
แผนภูมิรูปวงกลมแสดงการเปรียบเทียบงบประมาณด้านต่าง ๆ ที่ใช้ในสถานศึกษา (ยกเว้นเงินเดือน – ค่าจ้าง)



4. แผนภูมิแท่ง (Bar chart) เป็นรูปแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวแท่งแปรตามปริมาณข้อมูล ซึ่งแผนภูมิแท่งมีหลายประเภท คือ แผนภูมิแท่งเชิงเดียว แผนภูมิแท่งเชิงซ้อน และแผนภูมิแท่งส่วนประกอบ ดังนี้ ตัวอย่าง

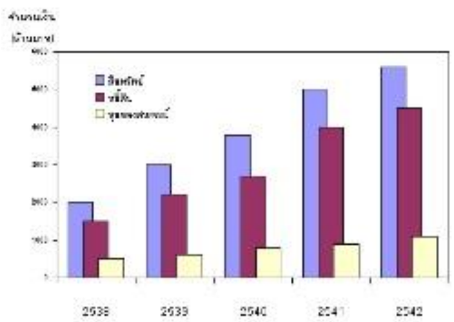
4.1) แผนภูมิแท่งเชิงเดี่ยว (Simple bar chart)

แผนภูมิแสดงจำนวนที่อยู่อาศัยเปิดตัวใหม่ในเขตกทม. และปริมณฑล



4.2) แผนภูมิแท่งเชิงซ้อน (Multiple bar chart) เป็นแผนภูมิแท่งที่ใช้เปรียบเทียบข้อมูลตั้งแต่ 2 ชุดขึ้นไป

แผนภูมิแท่งแสดงสินทรัพย์ หนี้สินและทุนของสหกรณ์ออมทรัพย์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

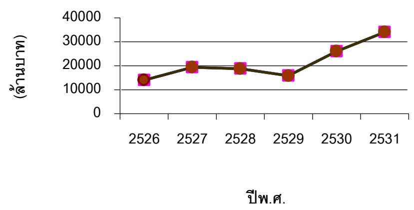


5. การนำเสนอข้อมูลโดยใช้กราฟเส้น

ข้อมูลที่นำเสนอด้วยกราฟ ใช้กับข้อมูลที่มีการเปลี่ยนแปลงไปตามกาลเวลา การนำเสนอข้อมูลด้วยกราฟช่วยให้เกิดการเปรียบเทียบได้ง่ายกว่า และถ้ากราฟในรูปเดียวกันมีหลายเส้น ต้องใช้สีหรือลวดลายของเส้นที่ต่างกัน พร้อมกับเขียนชื่อกำกับแต่ละเส้นด้วย

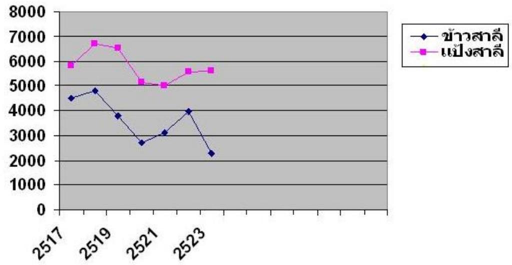
5.1 กราฟเชิงเดี่ยว คือ กราฟที่แสดงลักษณะของข้อมูลเพียงชุดเดียว

กราฟแสดงปริมาณสินค้าที่นำเข้าจากประเทศสิงคโปร์ ปีพ.ศ. 2526 – 2531



5.2 กราฟเชิงซ้อน เป็นการนำเสนอข้อมูลในลักษณะเดียวกับกราฟเชิงเดี่ยว แต่กราฟเชิงซ้อนเป็นการนำเสนอเพื่อเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างข้อมูลตั้งแต่ 2 ชุดขึ้นไป

กราฟแสดงราคาข้าวสาลี และราคาแป้งข้าวสาลีที่ประเทศไทยสั่งเข้ามาตั้งแต่ปี 2517 – 2523



สถิติกับการตัดสินใจ

การตัดสินใจบางเรื่อง ไม่สามารถนำข้อมูลมาประกอบการตัดสินใจได้ทันที ซึ่งอาจเป็นเพราะข้อมูลมีจำนวนมาก ทำให้มองเห็นภาพไม่ชัดเจน ดังนั้น จึงจำเป็นต้องนำข้อมูลมาวิเคราะห์ก่อน ข้อมูลที่ผ่านการวิเคราะห์เรียกว่า **" สารสนเทศหรือข่าวสาร"** (Information) จะช่วยให้การตัดสินใจดียิ่งขึ้น

หลักในการเลือกข้อมูลมาใช้ประกอบการตัดสินใจ จะต้อง

1) เชื่อถือได้
2) ครบถ้วน
3) ทันสมัย

วีดิทัศน์ เรื่อง การนำเสนอข้อมูล

วีดิทัศน์ เรื่อง การนำเสนอข้อมูลโดยใช้แผนภูมิแท่ง

วีดิทัศน์ เรื่อง การนำเสนอข้อมูลด้วยกราฟเส้น

กิจกรรมบทที่ 7

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยมของน้ำหนักเด็ก 20 คน ซึ่งมีน้ำหนักเป็นกิโลกรัม ดังนี้

12	40	34	28	40	32	26	15	40	18
24	28	29	34	27	28	24	28	40	13

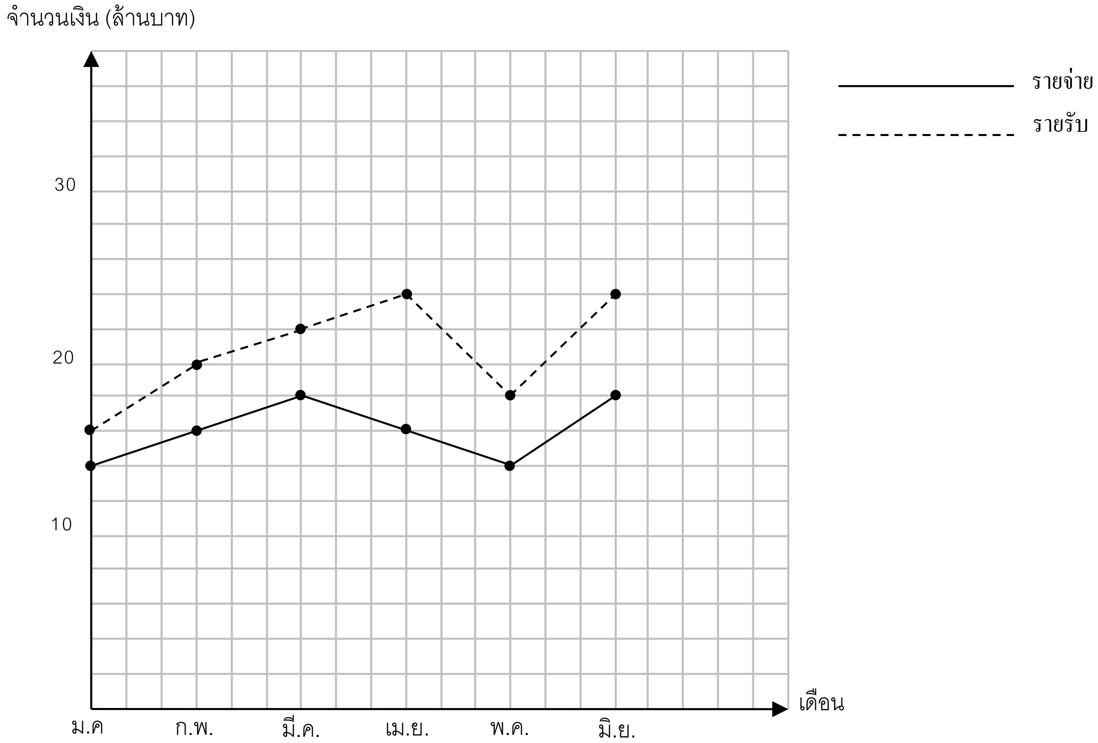
2. ตารางแสดงคะแนนสอบของนักเรียน ดังนี้

คะแนน	ความถี่ (f)
18 – 22	2
23 – 27	8
28 – 32	15
33 – 37	11
38 – 42	3
43 – 47	1

จากตาราง จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน ฐานนิยม

แบบฝึกหัดที่ 2

1. กราฟเส้นแสดงรายรับ – รายจ่ายของบริษัทแห่งหนึ่งในรอบ 6 เดือนแรกของปี พ.ศ. 2535



จากกราฟจงตอบคำถามต่อไปนี้

1) ในแต่ละเดือนบริษัทมีกำไรหรือขาดทุนเท่าไร

1.1) มกราคม 1.2) กุมภาพันธ์

1.3) มีนาคม 1.4) เมษายน

1.5) พฤษภาคม 1.6) มิถุนายน

2) เดือนอะไรบริษัทมีกำไรมากที่สุดเป็นเท่าไร

3) เดือนอะไรบริษัทมีกำไรน้อยที่สุดเป็นเท่าไร

4) เดือนใดบ้างที่บริษัทมีกำไรเท่ากัน

5) มีเดือนอะไรบ้างที่บริษัทขาดทุน

2. การเลือกข้อมูลมาใช้ประกอบการตัดสินใจต้องอาศัยหลักการใดบ้าง

3. ข้อมูล ต่างกับ สารสนเทศ อย่างไร จงอธิบายพร้อมยกตัวอย่างประกอบด้วย

ดูเฉลยกิจกรรมท้ายเล่ม

บทที่ 8
ความน่าจะเป็น

สาระสำคัญ

1. การนับจำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดจากการกระทำ หรือการทดลองใดๆ ต้องอาศัยกฎเกณฑ์การนับ จึงจะทำให้ง่ายและสะดวก รวดเร็ว
2. ความน่าจะเป็น คือ จำนวนที่แสดงให้ทราบว่าเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่ง มีโอกาสเกิดขึ้นมากหรือน้อยเพียงใด สิ่งที่จำเป็นต้องทราบทำความเข้าใจ คือ
   - การทดลองสุ่ม (Random Experiment)
   - แซมเปิลสเปซ (Sample Space)
   - เหตุการณ์ (Event)
3. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใดๆ เป็นการเปรียบเทียบจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์นั้นๆ กับจำนวนสมาชิกของแซมเปิลสเปซ ซึ่งเป็นค่าที่จะช่วยในการพยากรณ์หรือการตัดสินใจได้

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. หาจำนวนผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นของเหตุการณ์ โดยใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับและแผนภาพต้นไม้อย่างง่ายได้
2. อธิบายการทดลองสุ่ม เหตุการณ์ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์และหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่กำหนดให้ได้
3. นำความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นไปใช้ในการคาดการณ์และช่วยในการตัดสินใจ

ขอบข่ายเนื้อหา

เรื่องที่ 1 กฎเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับและแผนภาพต้นไม้
เรื่องที่ 2 ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์
เรื่องที่ 3 การนำความน่าจะเป็นไปใช้

เรื่องที่ 1

กฎเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับและแผนภาพต้นไม้

ในชีวิตประจำวันของคนเรามีการกระทำหรือการทดลองหลายอย่างที่จะเกิดผลลัพธ์ได้หลายวิธี การหาจำนวนรูปแบบหรือจำนวนวิธีที่อาจเกิดขึ้นได้จากการนับทั้งหมด โดยมีกฎเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับจากการทำงานดังนี้

1.1 การทำงานที่มี 2 อย่างหรือสองขั้นตอน

ถ้างานอย่างแรกมีวิธีทำได้ n_1 วิธี และในแต่ละวิธีทำงานอย่างแรกมีวิธีที่จะทำงานอย่างที่สองได้ n_2 วิธี

สามารถเขียนแผนผังการทำงานได้ดังนี้

งานอย่างที่ 1	งานอย่างที่ 2
n_1 วิธี	n_2 วิธี

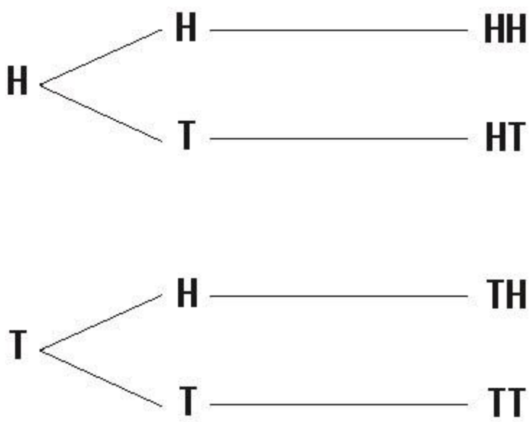
จำนวนวิธีทำงานทั้งสองอย่าง = $n_1 \times n_2$ วิธี

ตัวอย่างที่ 1 โยนเหรียญ 2 อันพร้อมกัน 1 ครั้ง เกิดผลลัพธ์ได้ทั้งหมดกี่วิธี

กำหนดให้ H แทนผลที่เกิดขึ้นเป็นหัว และ T แทนผลที่เกิดขึ้นเป็นก้อย

วิธีทำ การโยนเหรียญ 2 เหรียญพร้อมกัน เป็นการทำงานที่มี 2 ขั้นตอน สามารถแสดงเหตุการณ์ที่เกิด โดยใช้แผนภาพต้นไม้ได้ ดังนี้

เหรียญที่ 1 เหรียญที่ 2 เหตุการณ์ที่เกิดขึ้น

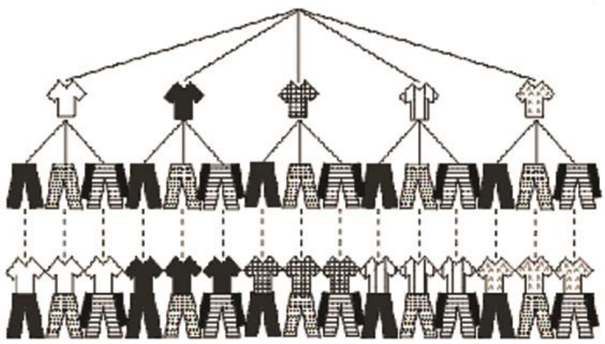


นั่นคือ โยนเหรียญ 2 เหรียญพร้อมกัน 1 ครั้ง เกิดได้ 4 วิธี คือ HH, HT, TH, TT ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 ชายคนหนึ่งมีเสื้อเชิ้ตต่างกัน 5 ตัว

และกางเกงขายาวต่างกัน 3 ตัว

วิธีทำ เราสามารถใช้แผนภาพต้นไม้ช่วยในการหาวิธีทั้งหมดที่เป็นไปได้แสดงได้ดังแผนภาพข้างล่างนี้



จากแผนภาพต้นไม้จะพบว่าการแต่งกายของชายคนนี้ที่แตกต่างกันนับได้ทั้งหมด 15 วิธี

ตัวอย่างที่ 3 โยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน 1 ครั้ง เกิดได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ โยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน 1 ครั้ง เป็นการทำงาน 2 อย่าง

	ลูกที่ 1		ลูกที่ 2		
จัด	$\boxed{}$	ได้ 6	$\boxed{}$	$\times$	6

งานอย่างแรก เกิดจากลูกเต๋าลูกที่ 1 ซึ่งมี 6 หน้า เกิดได้ 6 วิธี

งานที่ 2 เกิดจากลูกเต๋าลูกที่ 2 ซึ่งมี 6 หน้า เกิดได้ 6 วิธี

$\therefore$ โยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน 1 ครั้ง เกิดได้ = 6×6 = 36 วิธี

สามารถแจกแจงผลลัพธ์ ได้ดังนี้

(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6)

(2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6)

(3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (3, 5) (3, 6)

(4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (4, 6)

(5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4) (5, 5) (5, 6)

(6, 1) (6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5) (6, 6)

ตอบ 36 วิธี

วีดิทัศน์ เรื่อง แผนภาพต้นไม้ กับกฎการคูณที่มีการทำงาน 2 อย่าง

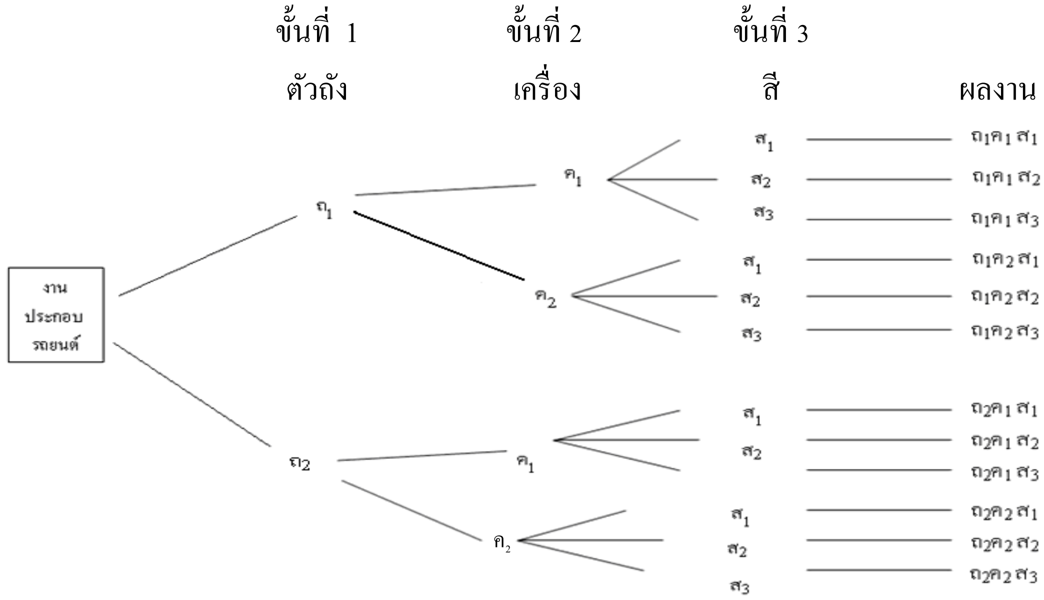
1.2 การทำงานที่มี 3 อย่างหรือสามขั้นตอน

การนับจะมีแนวคิดในทำนองเดียวกัน แต่จำนวนขั้นตอนในการเขียนแผนภาพต้นไม้ หรือการหาผลคูณคาร์ทีเซียน จะมี 3 งานหรือ 3 ขั้นตอนที่ต้องทำต่อเนื่องกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4 บริษัทรถยนต์แห่งหนึ่งผลิตตัวถังรถยนต์ออกมา 2 แบบ มีเครื่องยนต์ 2 ขนาด และสีต่างๆ กัน 3 สี ถ้าต้องการแสดงรถยนต์ให้ครบทุกแบบ ทุกขนาด และทุกสี จะต้องใช้รถยนต์อย่างน้อยที่สุดกี่คัน

วิธีทำ โดยใช้แผนภาพต้นไม้ (Tree Diagram) จะได้ผลดังนี้

การทำงานมี 3 ขั้นคือ



ดังนั้น จะต้องมีรถยนต์แสดงอย่างน้อย 12 คัน จึงจะครบทุกแบบทุกสีทุกขนาด

ตัวอย่างที่ 5 ในการเลือกตั้งกรรมการชุดหนึ่งจะประกอบไปด้วย ประธาน รองประธาน เหรัญญิก และเลขา โดยกรรมการแต่ละคนจะดำรงตำแหน่งได้เพียงตำแหน่งเดียวเท่านั้น ถ้ามีผู้สมัครทั้งหมด 6 คน เป็นชาย 2 คน เป็นหญิง 4 คน ผลการเลือกตั้งกรรมการชุดนี้จะมีได้ทั้งหมดกี่แบบต่างกัน โดยที่

1. ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
2. กำหนดให้ประธานเป็นชาย และเลขาต้องเป็นหญิง
3. กรรมการต้องเป็นหญิงล้วนๆ

วิธีทำ มีผู้สมัคร 6 คน เป็นชาย 2 คน เป็นหญิง 4 คน ให้เลือกกรรมการ 4 ตำแหน่ง ประธาน รองประธาน เหรัญญิก เลขา

1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม แต่ละคนเป็นได้ตำแหน่งเดียว

ตำแหน่งประธาน เลือกได้	6	วิธี
ตำแหน่งรองประธาน เลือกได้	5	วิธี
ตำแหน่งเหรัญญิก เลือกได้	4	วิธี
ตำแหน่งเลขา เลือกได้	3	วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีในการเลือกกรรมการมี $= 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ วิธี

2) กำหนดประธานเป็นชาย และเลขาต้องเป็นหญิง

ตำแหน่งประธานเป็นชาย เลือกได้	2	วิธี
ตำแหน่งเลขาที่เป็นหญิง เลือกได้	4	วิธี
ตำแหน่งเหรัญญิก (คนที่เหลือ) เลือกได้	4	วิธี
ตำแหน่งรองประธาน เลือกได้	3	วิธี (คนที่เหลือสุดท้าย)

ดังนั้น จำนวนวิธีในการเลือกกรรมการมี $= 2 \times 4 \times 3 \times 4 = 96$ วิธี

3) กรรมการต้องเป็นผู้หญิงล้วน ๆ

ตำแหน่งประธานเป็นหญิง เลือกได้	4	วิธี
ตำแหน่งเลขาเป็นหญิง เลือกได้	3	วิธี
ตำแหน่งรองประธาน เลือกได้	2	วิธี (เฉพาะหญิงที่เหลือ)
ตำแหน่งเหรัญญิก เลือกได้	1	วิธี (เฉพาะหญิงที่เหลือ)

ดังนั้น จำนวนวิธีในการเลือกกรรมการมี $= 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ วิธี

ตัวอย่างที่ 6 ห้องประชุมแห่งหนึ่งมี 3 ประตู จงหาวิธีในการเดินเข้า - ออกห้องประชุม โดยมีเงื่อนไขต่างกันดังนี้

จำนวนวิธีในการเดินเข้า

1. จำนวนวิธีในการเดินเข้า - ออก
2. จำนวนวิธีในการเดินเข้า - ออก โดยไม่ซ้ำประตูกัน
3. จำนวนวิธีในการเดินเข้า - ออก โดยใช้ประตูเดิม

วิธีทำ ประตูห้องประชุมมี 3 ประตู หมายเลข 1 2 และ 3

การเดิน $\boxed{}\boxed{}$

1. จำนวนวิธีการเดิน เข้า - ออก $= 3 \times 3 = 9$ วิธี (ใช้ประตูซ้ำได้)
2. จำนวนวิธีการเดินเข้า - ออก โดยไม่ซ้ำประตูกัน $= 3 \times 2 = 6$ วิธี
3. จำนวนวิธีการเดินเข้า - ออก โดยใช้ประตูเดิม $= 3 \times 1 = 3$ วิธี

ตัวอย่างที่ 7 ครูมีหนังสือ 5 เล่มแตกต่างกัน ต้องการแจกให้นักเรียน 4 คน จงหาจำนวนวิธีแจกหนังสือโดยที่

1. ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
2. ไม่มีใครได้หนังสือเกิน 1 เล่ม

วิธีทำ การแจกหนังสือต้องพิจารณาการแจกทีละเล่ม

หนังสือเล่มที่ $\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}$

1. ไม่มีเงื่อนไข (แจกซ้ำได้) ดังนั้นแจกได้ $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ วิธี
2. ไม่มีใครได้เกิน 1 เล่ม แปลว่า ไม่มีใครได้ซ้ำ ได้แล้วจะไม่แจกให้อีก

ดังนั้น จะมีวิธีแจกหนังสือ $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ วิธี

วีดิทัศน์ เรื่อง แผนภาพต้นไม้ กับกฎการคูณที่มีการทำงานมากกว่า 2 อย่าง

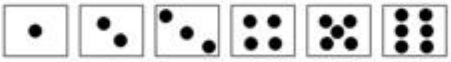
เรื่องที่ 2

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

ในชีวิตประจำวันมักพบกับการคาดคะเน หรือการประมาณเหตุการณ์ เพื่อใช้ในการตัดสินใจ โอกาสที่เหตุการณ์นั้น จะเกิดได้มีมากน้อยเพียงใด ขึ้นอยู่กับอัตราส่วนระหว่างจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์นั้น กับจำนวนครั้งของการทำงานผู้เรียนจึงต้องทราบ และทำความเข้าใจ กับคำเหล่านี้

1. การทดลองสุ่ม (Random Experiment) คือ การทดลองที่ไม่สามารถระบุผลลัพธ์ได้อย่างแน่นอน แต่บอกได้ว่าผลลัพธ์ของการทดลองนั้นมีโอกาสเกิดอะไรขึ้นได้บ้าง

ตัวอย่างที่ 1 การทดลองโยนลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง แต้มที่จะเกิดขึ้นได้ คือ แต้ม 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6 ซึ่งไม่สามารถบอกได้ว่าจะเป็นแต้มอะไรใน 6 แต้มนี้



ดังนั้นผลลัพธ์ทั้งหมดที่จะเกิดขึ้นคือแต้ม 1, 2, 3, 4, 5, 6

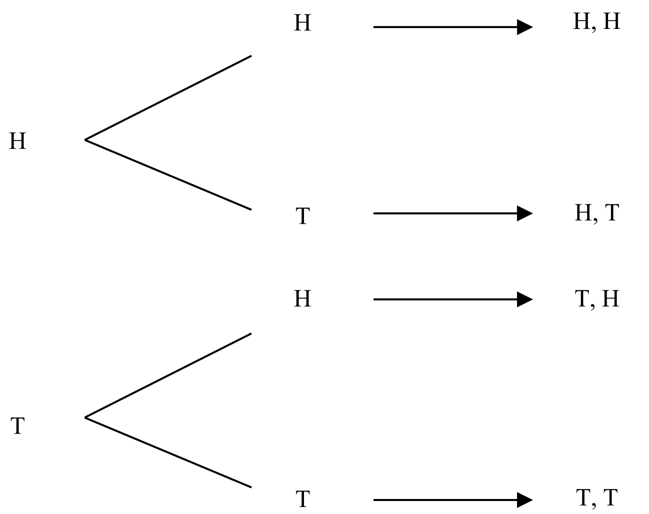
ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนผลที่อาจจะเกิดขึ้นได้ทั้งหมดในการโยนเหรียญบาท 1 เหรียญ 2 ครั้ง

<u>วิธีทำ</u> ในการโยนเหรียญบาท 1 เหรียญ ผลที่อาจเกิดขึ้นคือหัวหรือก้อย

ถ้าให้ H แทน หัว และให้ T แทน ก้อย

ในการหาผลที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมดจากการโยนเหรียญบาท 1 เหรียญ 2 ครั้ง ใช้แผนภาพช่วยได้ดังนี้

ผลที่อาจจะเกิดจากการโยนเหรียญบาทครั้งที่ 1 **ผลที่อาจจะเกิดจากการโยนเหรียญครั้งที่ 2** **ผลที่อาจจะเกิดจากการโยนเหรียญทั้ง 2 ครั้ง**



ผลทั้งหมดที่อาจจะเกิดขึ้นได้ คือ (H, H), (H, T), (T, H) และ (T, T)

วีดิทัศน์ เรื่อง การทดลองสุ่ม

2. แซมเปิลสเปซ (Sample Space) เป็นเซตที่มีสมาชิกประกอบด้วยสิ่งที่ต้องการ ทั้งหมด จากการทดลองอย่างใดอย่างหนึ่ง เขียนแทนด้วย S เช่น

ตัวอย่างที่ 3 ในการโยนลูกเต๋าถ้าต้องการดูว่าแต้มลูกเต๋าคืออะไร

ผลลัพธ์ที่อาจจะเกิดขึ้นได้คือ ลูกเต๋าขึ้นแต้ม 1 หรือ 2 หรือ 3 หรือ 4 หรือ 5 หรือ 6

ดังนั้นแซมเปิลสเปซที่ได้ คือ $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

ตัวอย่างที่ 4 จากการทดลองสุ่มโดยการทดลองทอดลูกเต๋า 2 ลูก

จงหาแซมเปิลสเปซของแต้มของลูกเต๋าที่หงายขึ้น

วิธีทำเนื่องจากโจทย์สนใจแต้มของลูกเต๋าที่หงายขึ้น ดังนั้นเราต้องเขียนแต้มของลูกเต๋าที่มีโอกาสที่จะหงายขึ้นมาทั้งหมด และเพื่อความสะดวกให้ (a , b) แทนผลลัพธ์ที่อาจจะเกิดขึ้น โดยที่

a แทนแต้มที่หงายขึ้นของลูกเต๋าลูกแรก

b แทนแต้มที่หงายขึ้นของลูกเต๋าลูกที่สอง

ดังนั้นแซมเปิลสเปซของการทดลองสุ่มคือ

$$
\begin{aligned}
S = \{&(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),\\
&(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),\\
&(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),\\
&(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),\\
&(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),\\
&(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}
\end{aligned}
$$

วีดิทัศน์ เรื่อง แซมเปิลสเปซ

3. เหตุการณ์ (event) คือ เซตที่เป็นสับเซตของ Sample Space หรือเหตุการณ์ที่เราสนใจ จากการทดลองสุ่ม

ตัวอย่างที่ 5 ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือ จำนวนแต้มที่ได้ จะได้

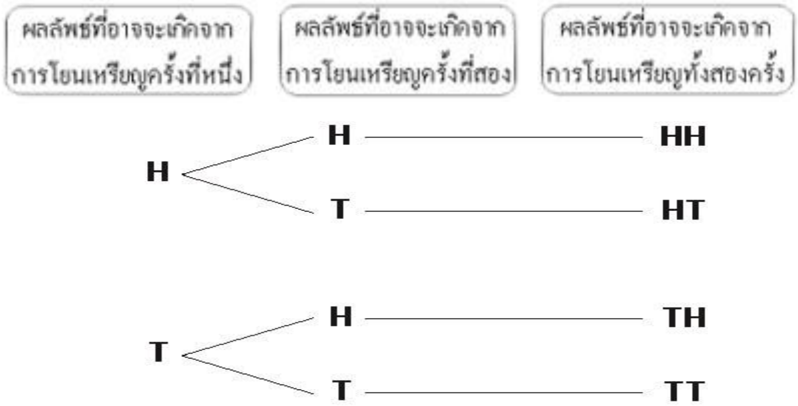
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ถ้าให้ E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มซึ่งหารด้วย 3 ลงตัว จะได้ $E_1 = \{3, 6\}$

E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มมากกว่า 2 จะได้ $E_2 = \{3, 4, 5, 6\}$

วีดิทัศน์ เรื่อง เหตุการณ์

ตัวอย่างที่ 6 โยนเหรียญบาท 1 เหรียญ 2 ครั้ง จงหาผลลัพธ์ของเหตุการณ์ที่จะออกหัวอย่างน้อย 1 ครั้ง การหาผลลัพธ์ทั้งหมดที่อาจจะเกิดขึ้นจากการโยนเหรียญบาท 1 เหรียญ 2 ครั้ง โดยใช้แผนภาพต้นไม้ ดังนี้



ผลลัพธ์ทั้งหมดที่อาจจะเกิดขึ้นจากการทดลองสุ่ม มี 4 แบบ คือ HH, HT, TH และ TT นั่นคือผลลัพธ์ของ เหตุการณ์ที่จะออกหัวอย่างน้อย 1 ครั้ง มี 3 แบบ คือ HH, HT และ TH

4. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ คือ จำนวนที่แสดงให้ทราบว่าเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งมีโอกาสเกิดขึ้น มากหรือน้อยเพียงใด

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใด ๆ เท่ากับอัตราส่วนของจำนวนเหตุการณ์ที่เราสนใจ (จะให้เกิดขึ้นหรือไม่เกิดขึ้นก็ได้) ต่อจำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดที่อาจจะเกิดขึ้นได้ ซึ่งมีสูตรในการคิดคำนวณดังนี้

$$\text{ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์} = \frac{\text{จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ที่เราสนใจ}}{\text{จำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดที่อาจจะเกิดขึ้น}}$$

เมื่อผลทั้งหมดที่อาจจะเกิดขึ้นจากทดลองสุ่มแต่ละตัวมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่าๆ กัน

กำหนดให้ E แทน เหตุการณ์ที่เราสนใจ

P(E) แทน ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

n(E) แทน จำนวนสมาชิกของเหตุการณ์

n(S) แทน จำนวนสมาชิกของผลลัพธ์ทั้งหมดที่อาจจะเกิดขึ้นได้

ดังนั้น $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

ตัวอย่างที่ 7 มีลูกปิงปอง 4 ลูก เขียนหมายเลขกำกับไว้ดังนี้คือ 0, 1, 2, 3 ถ้าสุ่มหยิบมา 2 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ผลรวมของตัวเลขมากกว่า 3

วิธีทำ ให้ S เป็นแซมเปิลสเปซ

$S = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$

จะได้ $n(S) = 6$

E เป็นเหตุการณ์หรือสิ่งที่โจทย์อยากทราบ

$E = \{(1, 3), (2, 3)\}$

จะได้ $n(E) = 2$

จากสูตร $p(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$ แทนค่าได้ $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลรวมของตัวเลขมากกว่า 3 เท่ากับ $\frac{1}{3}$

<u>ข้อสังเกต</u>

1. สมาชิกทุกตัวในเหตุการณ์ E ต้องเป็นสมาชิกในอยู่ในแซมเปิลสเปซ S
   ดังนั้น $0 \le n(E) \le n(S)$
2. ถ้า E เป็นเหตุการณใด ๆ ในแซมเปิลสเปซ S จะได้ว่า
   2.1 $0 \le P(E) \le 1$
   2.2 ถ้า $P(E) = 1$ หมายถึงเหตุการณ์นั้นต้องเกิดขึ้นแน่นอน
   ถ้า $P(E) = 0$ หมายถึงเหตุการณ์นั้นต้องไม่เกิด
   2.3 ถ้า S เป็นแซมเปิลสเปซ จะได้ว่า $P(S) = 1$

เรื่องที่ 3

การนำความน่าจะเป็นไปใช้

การนำความน่าจะเป็นไปใช้ ต้องการให้ผู้ที่ศึกษาทราบว่าเหตุการณ์ต่างๆ นั้น มีโอกาสจะเกิดขึ้นมากหรือน้อยเพียงใด เพื่อช่วยในการประกอบการตัดสินใจ เช่น

ตัวอย่างที่ 1 ไพ่สำรับหนึ่งมี 52 ใบ แบ่งเป็น 2 สี คือ สีแดง ได้แก่โพแดงกับข้าวหลามตัด สีดำ ได้แก่ โพดำกับดอกจิก แต่ละชนิดมี 13 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบมา 1 ใบแล้วได้โพดำหรือสีแดง

วิธีทำ ให้ S แทน แซมเปิลสเปซ ไพ่ทั้งหมดมี 52 ใบ หยิบมาทีละ 1 ใบจะได้ 52 วิธี

ดังนั้น $n(S) = 52$

E แทน เหตุการณ์ ไพ่โพดำมี 13 ใบ และไพ่สีแดงมี 26 ใบ

ดังนั้น $n(E) = 13 + 26 = 39$

จากสูตร $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$ แทนค่าได้ $P(E) = \dfrac{39}{52} = \dfrac{3}{4}$

ความน่าจะเป็นที่หยิบไพ่ 1 ใบแล้วได้โพดำหรือสีแดง เท่ากับ $\dfrac{3}{4}$

ตัวอย่างที่ 2 ในการหยิบสลาก 1 ใบจากสลาก 10 ใบ ซึ่งมีเลข 0 - 9 กำกับอยู่ จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้เป็นจำนวนเฉพาะสลากมีเลข 2 เลข 3 เลข 5 เลข 7

วิธีทำ S แทน แซมเปิลสเปซ สลากมี 10 ใบ หยิบมาทีละ 1 ใบ จึงหยิบได้ 10 วิธี

$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$n(S)=10$

E แทน เหตุการณ์ สลากที่เป็นจำนวนเฉพาะ

$E = \{2, 3, 5, 7\}$

$n(E) = 4$

จากสูตร $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$ แทนค่าได้ $P(E) = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้เป็นจำนวนจำเพาะ เท่ากับ $\dfrac{2}{5}$

วีดิทัศน์ เรื่องการนำความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ไปใช้

บทที่ 9

การใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในงานอาชีพ

สาระสำคัญ

การประกอบอาชีพในสังคมและในกลุ่มประชาคมอาเซียนนั้น มีหลากหลายสาขาอาชีพทั้งในด้านอุตสาหกรรม เกษตรกรรม พณิชยกรรม ความคิดสร้างสรรค์ และการบริหารจัดการ อาชีพในวงการดังกล่าวล้วนมีการใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์เข้าไปเกี่ยวข้องเกือบทุกกลุ่มอาชีพ ซึ่งผู้เรียนสามารถนำความรู้และทักษะที่ได้เรียนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายมาประยุกต์ใช้

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. บอกประเภทของงานอาชีพที่ใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์ได้
2. นำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในงานอาชีพได้

ขอบข่ายเนื้อหา

เรื่องที่ 1 ลักษณะ ประเภทของงานอาชีพที่ใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์

เรื่องที่ 2 การนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับงานอาชีพในสังคมและประชาคมอาเซียน

เรื่องที่ 1

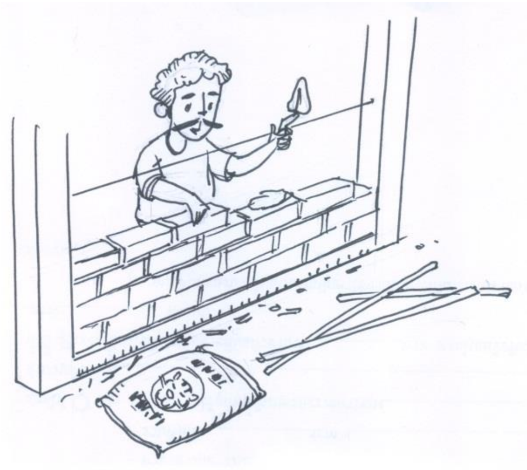
ลักษณะ ประเภทของงานอาชีพที่ใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์

1.1 กลุ่มอาชีพเกษตรกรรม ได้แก่ อาชีพ การทำนา ทำไร่ การปลูกผัก การเลี้ยงสัตว์ ประมง ฯลฯ

ลักษณะงานเบื้องต้นที่ใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์

1. การสำรวจของตลาดที่จะปลูกพืชเกษตรกรรม
2. การเตรียมพื้นที่ดิน ซึ่งขึ้นอยู่กับความกว้าง ความยาวของพื้นที่ว่าผู้ประกอบการใช้พื้นที่กี่ไร่ กี่งาน กี่ตารางวา ในการทำแปลง ขุดร่อง เพื่อใช้เป็นพื้นที่นา 1 ส่วน พื้นที่ปลูกผัก 1 ส่วน บ่อน้ำ 1 ส่วน การเลี้ยงสัตว์ 1 ส่วน พื้นที่อยู่อาศัย 1 ส่วน เป็นต้น
3. การเตรียมปุ๋ยว่าใช้ขนาดกี่กิโลกรัมต่อไร่
4. การฉีดยาฆ่าแมลงโดยใช้สารกำจัดศัตรูพืชทางชีวภาพ เช่น สะเดา และสมุนไพรอื่น ๆ เป็นต้น ใช้ความรู้เรื่องอัตราส่วน สัดส่วน เพื่อผสมยากำจัดศัตรูพืชกับน้ำก่อนฉีดพ่น
5. การเก็บเกี่ยวผลผลิต ซึ่งต้องใช้ทักษะการคำนวณระยะเวลาตั้งแต่การปลูก จนถึงระยะการเก็บเกี่ยวผลผลิต
6. การจำหน่ายผลผลิต ซึ่งต้องใช้ทักษะการจัดทำบัญชีรับ – จ่าย การจดบันทึกจำนวนผลผลิตที่ได้

1.2 กลุ่มอาชีพอุตสาหกรรม ได้แก่ อาชีพพนักงานในโรงงานอุตสาหกรรมต่างๆ ได้แก่ อุตสาหกรรมห้องเย็น ถ้วยชามอุปกรณ์เซรามิค ผ้าขนหนู กระดาษและสิ่งพิมพ์ สแตนเลส เหล็ก พลาสติก ปูนซีเมนต์ ฯลฯ



ลักษณะงานเบื้องต้นที่ใช้ทักษะคณิตศาสตร์

1. การคำนวณเงินรายได้ประจำวัน
2. การคำนวณเงินค่าทำงานล่วงเวลา
3. การคำนวณเงินกู้และดอกเบี้ยคงที่หรือดอกเบี้ยทบต้น
4. การทำบัญชีรายรับ – รายจ่ายประจำวัน
5. การจัดทำบัญชีพัสดุ (การจัดซื้อ การเบิกจ่ายพัสดุ)
6. การสำรวจและวิจัยการตลาด
7. การคำนวณภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา

1.3 กลุ่มอาชีพพาณิชยกรรม ได้แก่ อาชีพค้าขาย ผู้ประกอบการร้านอาหารและเครื่องดื่ม ผู้ประกอบการขายปลีกและขายส่ง ธุรกิจการซื้อขายอสังหาริมทรัพย์ ธุรกิจการซื้อขายหุ้นในตลาดหลักทรัพย์ อาชีพการทำบัญชี การตลาด เป็นต้น

ลักษณะงานเบื้องต้นที่ใช้ทักษะคณิตศาสตร์

1. การจัดซื้อวัตถุดิบในการค้าขายปลีกหรือขายส่ง
2. การจำหน่ายสินค้า การคำนวณราคาสินค้าต่อหน่วย การทอนเงิน
3. การจัดทำบัญชีพัสดุ (การจัดซื้อ การเบิกจ่ายพัสดุ)
4. การจัดทำบัญชีรับ – จ่ายประจำวัน
5. การประชาสัมพันธ์ในงานธุรกิจค้าขายหรือพาณิชยกรรม ซึ่งต้องใช้ทักษะในการคำนวณขนาดของป้ายโฆษณา ขนาดตัวอักษร ขนาดและจำนวนแผ่นพับหรือใบปลิวโฆษณา
6. การคำนวณภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา

1.4 กลุ่มอาชีพด้านความคิดสร้างสรรค์ ได้แก่ ธุรกิจโฆษณา ธุรกิจการออกแบบตกแต่งที่อยู่อาศัย สำนักงานและสวนหย่อม การจัดดอกไม้และแจกันประดับ ธุรกิจการทำพวงหรีด การจัดกระเช้าของขวัญ เป็นต้น

ลักษณะงานเบื้องต้นที่ใช้ทักษะคณิตศาสตร์

1. การจัดเตรียมขนาด ปริมาตร รูปทรงของพื้นที่หรือชิ้นงานในการจัดทำธุรกิจ ซึ่งต้องใช้การวัดความกว้าง ความยาว ความสูงของพื้นที่หรือชิ้นงาน การออกแบบรูปทรงโดยใช้รูปเรขาคณิตสามมิติ
2. การคำนวณปริมาณของวัสดุอุปกรณ์ในการใช้ประดิษฐ์สร้างสรรค์ชิ้นงานหรือการจัดตกแต่งสวนหย่อม
3. การคำนวณเพื่อกำหนดราคาขายสินค้า
4. การจัดทำบัญชีพัสดุ (การจัดซื้อ การเบิกจ่ายพัสดุ)
5. การจัดทำบัญชีรับ – จ่าย ประจำวัน
6. การประชาสัมพันธ์ในอาชีพธุรกิจทุกประเภท ซึ่งต้องใช้ทักษะในการคำนวณเป็นพื้นฐานในการจัดทำแผ่นป้ายประชาสัมพันธ์หรือแผ่นพับ แผ่นปลิว
7. การคำนวณภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา

1.5 กลุ่มอาชีพบริหารจัดการและการบริการ ได้แก่ อาชีพกลุ่มงานบริการและการท่องเที่ยว งานบริการรักษาความปลอดภัย บริการดูแลทารกและเด็ก บริการดูแลผู้สูงอายุ บริการสันทนาการและการกีฬา เป็นต้น

ลักษณะงานเบื้องต้นที่ใช้ทักษะคณิตศาสตร์

1. การสำรวจพื้นที่ในการให้บริการ การคำนวณระยะทางในการให้บริการ
2. การจัดซื้อวัสดุ อุปกรณ์ในการให้บริการ
3. การรับสมัครและกำหนดเงินเดือนตามตำแหน่งงานของเจ้าหน้าที่ในการให้บริการ
4. การจัดทำตารางเวลา การอยู่เวร – ยามของเจ้าหน้าที่ประจำสำนักงาน
5. การจัดทำกำหนดการท่องเที่ยวและการให้บริการ รวมทั้งกำหนดราคาขายบริการในแต่ละพื้นที่
6. การคำนวณการใช้น้ำมันเชื้อเพลิงของยานพาหนะที่ให้บริการ
7. การจัดทำบัญชีพัสดุ และการเบิกจ่ายพัสดุ
8. การจัดทำบัญชีรับ – จ่ายประจำวัน
9. การจัดทำแผ่นป้ายโฆษณา ประชาสัมพันธ์การให้บริการ
10. การจัดทำสรุปรายงานและการนำเสนอข้อมูล
11. การคำนวณภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา

วีดิทัศน์ ลักษณะ ประเภทของงานที่ใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์

เรื่องที่ 2

การนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในงานอาชีพได้

ในการนำความรู้คณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับงานอาชีพทั้ง 5 กลุ่มงานอาชีพทั้งกลุ่มงานอาชีพเกษตรกรรม กลุ่มงานอาชีพอุตสาหกรรม กลุ่มงานอาชีพพาณิชยกรรม กลุ่มงานอาชีพความคิดสร้างสรรค์และกลุ่มงานอาชีพด้านบริหารจัดการและบริการจะต้องนำทักษะความรู้ทางคณิตศาสตร์มาใช้ทุกกลุ่มอาชีพ เช่น การจัดทำบัญชีรายรับ – รายจ่ายประจำวัน ประจำเดือน การคำนวณเงินค่าจ้าง การคำนวณภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา เป็นต้น กลุ่มอาชีพทุกกลุ่มอาชีพอาจจะใช้ทักษะความรู้คณิตศาสตร์ต่างกันออกไป ดังนั้น ในบทนี้จะนำเสนอตัวอย่างที่เป็นทักษะทางคณิตศาสตร์ที่ใช้กันมากเท่านั้น

2.1 ทักษะการจัดทำบัญชีรับ - จ่ายประจำวัน

ตัวอย่างที่ 1 การจัดทำบัญชีรายรับ – รายจ่ายประจำวันของเกษตรกรเลี้ยงปลา

วันที่ 5 มกราคม 2558 จ่ายค่าอาหารปลา 2,000 บาท ค่าไฟ 500 บาท จ่ายค่าจ้างขุดลอกบ่อ 500 บาท ขายปลาได้ 2,500 บาท

วันที่ 10 มกราคม 2558 จ่ายค่าอาหาร 300 บาท จ่ายค่าโทรศัพท์ 780 บาท ได้รับเงินจากการขายปลาอีก 3,800 บาท

วันที่ 15 มกราคม 2558 จ่ายค่าตาข่าย 800 บาท จ่ายค่าเสื้อผ้า 1,200 บาท ได้รับเงินจากการขายปลา 4,500 บาท

วัน เดือน ปี	รายการรับ	จำนวนเงิน		วัน เดือน ปี	รายการจ่าย	จำนวนเงิน	
		บาท	สต.			บาท	สต.
5 ม.ค. 58	รับเงินจากการขายปลา	2,500	-	5 ม.ค. 58	ค่าอาหารปลา	2,000	-
					ค่าไฟ	500	-
					ค่าจ้างขุดลอกบ่อ	500	-
10 ม.ค. 58	รับเงินจากการขายปลา	3,800	-	10 ม.ค. 58	ค่าอาหาร	300	-
					ค่าโทรศัพท์	780	-
12 ม.ค. 58	รับเงินจากการขายปลา	4,500	-	12 ม.ค. 58	ค่าตาข่าย	800	-
					ค่าเสื้อผ้า	1,200	-
	รวม	10,800	-		รวม	6,080	-
					ยอดคงเหลือยกไป	4,720	-

วีดิทัศน์ ทักษะการทำบัญชีรับ-จ่ายประจำวัน

2.2 ทักษะการคำนวณเงินค่าจ้าง

ตัวอย่างที่ 2 วิไลเป็นพนักงานของบริษัทแห่งหนึ่ง ซึ่งกำหนดเวลาทำงานวันจันทร์ถึงวันเสาร์ ได้รับค่าจ้างเป็นรายวันๆ ละ 350 บาท มีสิทธิได้รับค่าจ้างในวันหยุดตามประเพณี และวันหยุดพักผ่อนประจำปีโดยไม่ต้องทำงาน ในเดือนตุลาคม วิไลมาทำงานทุกวันในวันทำงานตามเวลาทำงานปกติ และวันที่ 1 ตุลาคมตรงกับวันจันทร์ในเดือนนี้มีวันหยุดตามประเพณี 1 วัน คือ วันที่ 23 ตุลาคม อยากทราบว่าในเดือนนี้วิไลได้รับค่าจ้างเท่าไร

วิธีทำ

เดือนตุลาคม						
อาทิตย์	จันทร์	อังคาร	พุธ	พฤหัส	ศุกร์	เสาร์
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

เดือนตุลาคม วิไลได้รับค่าจ้างในวันทำงาน 26 วัน และมีสิทธิได้รับค่าจ้างในวันหยุดตามประเพณี 1 วัน และได้รับค่าจ้างวันละ 350 บาท

ดังนั้น วิไลได้รับค่าจ้างในเดือนตุลาคม $= (26 + 1) \times 350$

$= 9{,}450$ บาท

2.3 ทักษะการคำนวณเงินค่านายหน้าและเงินปันผล

ตัวอย่างที่ 3 นายวุฒิชัยเป็นตัวแทนขายโทรศัพท์ ซึ่งมีราคา 10,500 บาทให้กับบริษัทแห่งหนึ่ง บริษัทคิดค่านายหน้า 10% อยากทราบว่า วุฒิชัยต้องส่งเงินให้บริษัทเท่าไร

วิธีทำ ค่านายหน้าในการขาย $= \frac{10}{100} \times 10{,}500 = 1{,}050$ บาท

ดังนั้น วุฒิชัยต้องส่งเงินให้บริษัท $= 10{,}500 - 1{,}050 = 9{,}450$ บาท

ตัวอย่างที่ 4 จินตนาลงทุนหุ้นกับบริษัทหนึ่งจำนวน 200 หุ้น มูลค่าหุ้นละ 150 บาท อัตราปันผล 12% สิ้นปีเขาจะได้เงินปันผลเท่าไร

วิธีทำ เงินปันผลต่อ = อัตราเงินปันผล × มูลค่าหุ้น

$= 12\% \times 150$

$= \frac{12}{100} \times 150$

$= 18$ บาท

จินตนามีหุ้น 200 หุ้น

$\therefore$ จะได้รับเงินปันผล $= 18 \times 200$

$= 3{,}600$ บาท

2.4 ทักษะการคำนวณภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา

ตัวอย่าง นายโชคดีได้รับเงินเดือนๆ ละ 38,000 บาท สิ้นปีสามารถหักค่าใช้จ่ายได้ร้อยละ 40 ของเงินได้พึงประเมิน แต่ไม่เกิน 60,000 บาท หักค่าลดหย่อนผู้มีเงินได้ 30,000 บาท หักค่าเบี้ยประกันชีวิต 35,000 บาท หักดอกเบี้ยเงินกู้ยืมเพื่อซื้อบ้าน 36,450 บาท สิ้นปี นายโชคดียื่นแบบแสดงรายการภาษีเงินได้บุคคลธรรมต้องชำระภาษีหรือไม่ ถ้าชำระต้องชำระภาษีเป็นเงินเท่าไร

วิธีทำ เงินได้พึงประเมินของนายโชคดี $= 38,000 \times 12 = 456,000$ บาท

หัก ค่าใช้จ่าย ร้อยละ 40 ของเงินได้พึงประเมิน แต่ไม่เกิน 60,000 บาท

ค่าใช้จ่าย $\frac{40}{100} \times 456,000 = 182,400$ บาท

แต่ค่าใช้จ่ายของนายโชคดีคำนวณได้ 182,400 บาท แต่สามารถหักได้แค่ 60,000 บาท เท่านั้น

หัก ค่าลดหย่อนผู้มีเงินได้ 30,000 บาท

ค่าเบี้ยประกันชีวิต 35,000 บาท

ดอกเบี้ยเงินกู้ยืมเพื่อซื้อบ้าน 36,450 บาท

รวม หักค่าลดหย่อนได้ $= 30,000 + 35,000 + 36,450 = 101,450$ บาท

เงินได้สุทธิของนายโชคดี = เงินได้พึงประเมิน – (ค่าใช้จ่าย + หักค่าลดหย่อน)

$= 456,000 - (60,000 + 101,450)$

$= 294,550$ บาท

ตามตารางอัตราการเสียภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา เงินได้สุทธิ 0 – 150,000 บาท ไม่ต้องเสียภาษี ส่วนที่เกิน 150,001 – 300,000 บาท เสียภาษี 5%

นายโชคดีมีเงินได้สุทธิที่ต้องเสียภาษี $= 294,550 - 150,000 = 144,550$ บาท

$= 144,550 \times \frac{5}{100} = 7,227.50$ บาท

$\therefore$ นายโชคดีเสียภาษี 7,227.50 บาท

ตารางอัตราภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา		
เงินได้สุทธิ	**ช่วงเงินได้สุทธิ**	**อัตราภาษี (%)**
0 - 150,000 บาทแรก	150,000	ได้รับยกเว้น
150,001 - 300,000 บาทแรก	150,000	5%
300,001 - 500,000 บาทแรก	200,000	10%
500,001 - 750,000 บาทแรก	250,000	15%
750,001 – 1,00,000 บาทแรก	250,000	20%
1,000,001 – 2,000,000 บาทแรก	1,000,000	25%
2,000,001 – 4,000,000 บาทแรก	2,000,000	30%
ตั้งแต่ 4,000,001 บาทขึ้นไป		35%
ข้อมูล ณ วันที่ 8 ธันวาคม 2556		

วีดิทัศน์ การนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในงานอาชีพ

กิจกรรมบทที่ 9

แบบฝึกหัดที่ 1

1. นางสมหมายเป็นตัวแทนขายเครื่องกรองน้ำที่มีราคา 35,000 บาท ให้กับบริษัทแห่งหนึ่ง บริษัทคิดค่านายหน้า 30% อยากทราบว่านางสมหมายได้เงินค่านายหน้าเท่าไร

2. สมใจถือหุ้นบุริมสิทธิของบริษัทผลิตปลากระป๋องแห่งหนึ่ง จำนวน 200 หุ้น มูลค่าหุ้นละ 180 บาท อัตราเงินปันผล 8% เมื่อสิ้นปีสมใจนจะได้เงินปันผลทั้งหมดเท่าไร

ดูเฉลยกิจกรรมท้ายเล่ม

แบบทดสอบหลังเรียน

1. ข้อใดเป็นจำนวนตรรกยะ

ก. $\sqrt{3}$

ข. $\sqrt{5}$

ค. $\sqrt{7}$

ง. $\sqrt{9}$

2. ข้อใดต่อไปนี้**ไม่**ถูกต้อง

ก. $\frac{22}{7}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

ข. 0.59999... เป็นจำนวนตรรกยะ

ค. 1.505050... เป็นจำนวนอตรรกยะ

ง. 1.41141114... เป็นจำนวนอตรรกยะ

3. จงหาค่าของ $\sqrt{48}+\sqrt{108}$

ก. $10\sqrt{3}$

ข. $10\sqrt{5}$

ค. $24\sqrt{3}$

ง. $24\sqrt{5}$

4. $\sqrt{12x^2}$ เมื่อ $x > 0$ ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายตรงกับข้อใด

ก. $3x\sqrt{2}$

ข. $2x\sqrt{2}$

ค. $2x\sqrt{3}$

ง. $2x\sqrt{5}$

5. $\sqrt[3]{2a^2} \cdot \sqrt[3]{4a}$ ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายตรงกับข้อใด

ก. 2a

ข. 4a

ค. $2a^2$

ง. $4a^2$

6. กำหนดให้ $A = \{2, 4\}$

ข้อใดต่อไปนี้**ไม่ถูกต้อง**

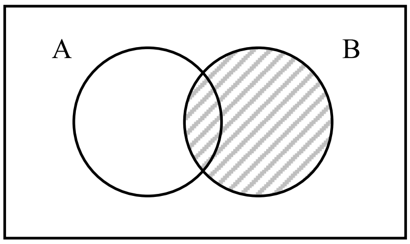
ก. $\{2\} \subset A$

ข. $\{2, 4\} \subset A$

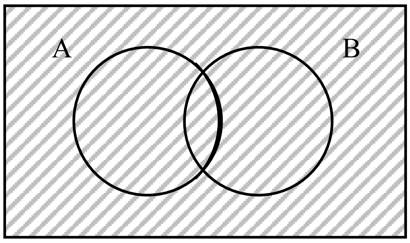
ค. เซตว่างเป็นสับเซตของ A

ง. จำนวนสับเซตทั้งหมดของ A เท่ากับ 3

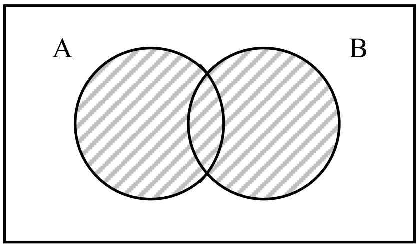
7. ข้อใด**ถูกต้อง**

ก. 

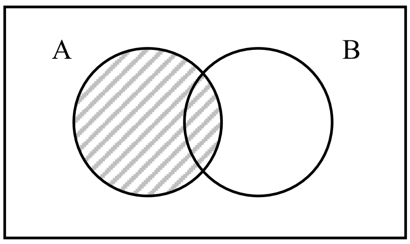
แทน $(A \cap B)'$

ข. 

แทน A'

ค. 

แทน $A \cup B$

ง. 

แทน $A \cap B$

8. ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4....\}$

   และ $B = \{\{1\}, \{2\}, 6, 7, 8....\}$

   แล้ว $A - B$ มีสมาชิกกี่ตัว

   ก. 2 ตัว

   ข. 3 ตัว

   ค. 5 ตัว

   ง. 6 ตัว

9. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

   วันจันทร์ สุดาทานข้าวกับไข่ต้ม

   วันอังคาร สุดาทานข้าวกับไข่เจียว

   วันพุธ สุดาทานข้าวกับไข่ตุ๋น

   สรุปว่าสุดาทานข้าวกับไข่ทุกวัน

   จากข้อความข้างต้นเป็นการให้เหตุผลแบบใด

   ก. อุปนัย

   ข. นิรนัย

   ค. ปรนัย

   ง. อัตนัย

10. กำหนดเหตุ

    1. สร้อยสุดาเป็นนักกีฬาวอลเลย์บอล

    2. นักกีฬาวอลเลย์บอลบางคนอารมณ์ดี

    ใช้แผนภาพ เวนน์ – ออยเลอร์ เขียนเหตุที่กำหนดได้กี่แบบ

    ก. 1

    ข. 2

    ค. 3

    ง. 4

11. จงหาค่าของ $\dfrac{\cos 45^\circ - \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ - \cos 30^\circ}$

    ก. 2

    ข. 1

    ค. 0

    ง. –1

12. แดงยืนบนหน้าผาแห่งหนึ่ง จากจุดที่เขาสังเกตสูงกว่าระดับน้ำทะเล 60 เมตร เมื่อมองลงไปที่เรือลำหนึ่งซึ่งจอดอยู่กลางทะเล โดยมุมมีแนวสายตาเท่ากับ แนวระดับเป็นมุมก้ม 30 องศา จงหาว่าเรือลำนี้จอดอยู่ห่างจากหน้าผาประมาณกี่เมตร

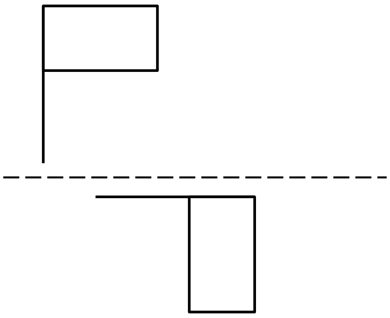
    ก. $\dfrac{60}{\sqrt{3}}$ เมตร

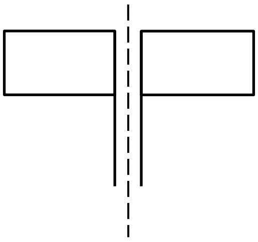
    ข. $60\sqrt{3}$ เมตร

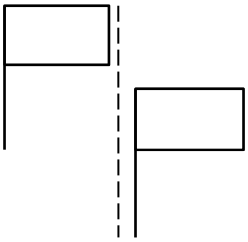
    ค. $\dfrac{20}{\sqrt{3}}$ เมตร

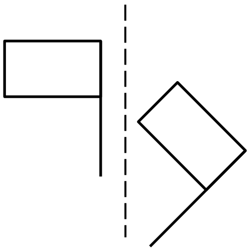
    ง. $20\sqrt{3}$ เมตร

13. ภาพในข้อใดเป็นการสะท้อนตามแกน y

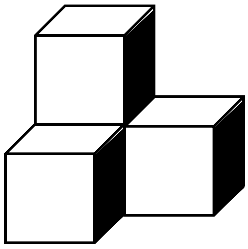
ก.


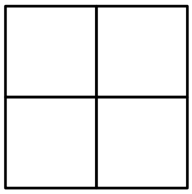
ข.


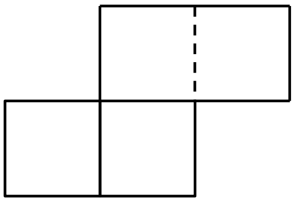
ค.


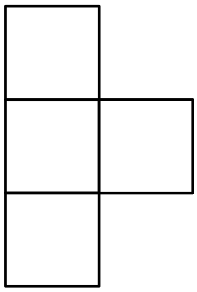
ง.


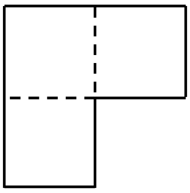
14. จากภาพไอโซเมตริก ข้อใดเป็นภาพด้านบนที่ถูกต้อง



ก.


ข.


ค.


ง.


15. ตารางแจกแจงความถี่ แสดงจำนวนนักเรียนในช่วงอายุต่างๆ ของนักเรียนกลุ่มหนึ่งเป็น ดังนี้

ช่วงอายุ (ปี)	ความถี่ (f)
1 – 5	4
6 – 10	9
11 – 15	2
16 – 20	5

อายุเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 9 ปี

ข. 9.5 ปี

ค. 10 ปี

ง. 10.5 ปี

16. กำหนดให้ข้อมูลชุดหนึ่ง คือ 10, 3, x, 6, 6 ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้ มีค่าเท่ากับ 6 แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 3

ข. 4

ค. 5

ง. 6

17. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลขนาดเดียวกันเป็นสีแดง 3 ลูก เป็นสีขาว 2 ลูก สุ่มหยิบลูกบอล 2 ลูกขึ้นมาพร้อมกัน ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีเดียวกันเท่ากับเท่าใด

ก. $\frac{1}{2}$

ข. $\frac{2}{3}$

ค. $\frac{3}{4}$

ง. $\frac{2}{5}$

ดูเฉลยแบบทดสอบท้ายเล่ม

18. โยนลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าหงาย มีผลบวกน้อยกว่า 5 เท่ากับเท่าใด

ก. $\frac{1}{3}$

ข. $\frac{1}{4}$

ค. $\frac{1}{6}$

ง. $\frac{1}{8}$

19. นายวิมลเป็นตัวแทนขายเครื่องอุปกรณ์เกี่ยวกับการเกษตรราคา 24,000 บาท ให้กับเกษตรกร บริษัทได้ค่านายหน้า 25% อยากทราบว่า นายวิมลได้ค่านายหน้าเท่าไร

ก. 5,000

ข. 6,000

ค. 7,000

ง. 9,000

20. นรินทร์เป็นพนักงานขายอุปกรณ์การกีฬาได้ค่าตอบแทนเดือนละ 22,000 บาท ไม่มีครอบครัว สิ้นปีหักค่าใช้จ่าย ร้อยละ 40 ของเงินได้พึงประเมิน แต่ไม่เกิน 60,000 บาท หักลดหย่อนผู้มีเงินได้ 30,000 บาท สิ้นปียื่นแบบแสดงรายการภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา ต้องชำระภาษีหรือไม่ ถ้าชำระต้องชำระเท่าไร (เงินได้พึงประเมิน 1 – 150,000 บาท ยกเว้นการเสียภาษี 150,000 – 300,000 บาท เสียภาษีในอัตรา 5%)

ก. ชำระภาษี 1,000 บาท

ข. ชำระภาษี 1,200 บาท

ค. จ่ายเพิ่มอีก 800 บาท

ง. ไม่ต้องชำระภาษี

ภาคผนวก

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน

ข้อ 1 ข	ข้อ 2 ก	ข้อ 3 ง	ข้อ 4 ข	ข้อ 5 ข
ข้อ 6 ค	ข้อ 7 ง	ข้อ 8 ก	ข้อ 9 ข	ข้อ 10 ก
ข้อ 11 ค	ข้อ 12 ก	ข้อ 13 ก	ข้อ 14 ค	ข้อ 15 ก
ข้อ 16 ข	ข้อ 17 ค	ข้อ 18 ข	ข้อ 19 ง	ข้อ 20 ก

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

ข้อ 1 ง	ข้อ 2 ค	ข้อ 3 ก	ข้อ 4 ค	ข้อ 5 ก
ข้อ 6 ง	ข้อ 7 ค	ข้อ 8 ค	ข้อ 9 ก	ข้อ 10 ข
ข้อ 11 ข	ข้อ 12 ข	ข้อ 13 ข	ข้อ 14 ง	ข้อ 15 ค
ข้อ 16 ค	ข้อ 17 ง	ข้อ 18 ค	ข้อ 19 ข	ข้อ 20 ข

เฉลยกิจกรรมบทที่ 1

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1

1) (1, 6) 2) [2, 7] 3) [-1, 4)

4) (-1, 6] 5) $(3, \infty)$ 6) $(-\infty, 5)$

7) $[-1, \infty)$ 8) $(-\infty, -2]$

เฉลยกิจกรรมบทที่ 2

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1

1. 1) จำนวนตรรกยะ
   2) จำนวนตรรกยะ
   3) จำนวนตรรกยะ
   4) จำนวนอตรรกยะ
   5) จำนวนตรรกยะ
   6) จำนวนตรรกยะ
   7) จำนวนอตรรกยะ
   8) จำนวนอตรรกยะ
   9) จำนวนตรรกยะ
   10) จำนวนตรรกยะ

2. 1) $8a^8$
   2) $2b^7$
   3) 5^6a^{12}
   4) $\frac{2}{ab^5}$
   5) x^7y^5
   6) $\frac{1}{2^3}$
   7) $\frac{1}{9}$
   8) 4

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 2

1. 1) 4 2) 3 3) $\frac{2}{3}$ 4) 2

   5) 4 6) 2 7) 5 8) -2

2. 1) $\frac{6}{5}$ 2) $\frac{-2}{3}$ 3) $\frac{2}{7}$ 4) $\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 3

1. 1) $7\sqrt{3}$ 2) $10\sqrt{5}$ 3) $8\sqrt[3]{7}$ 4) $2\sqrt{2}$
   5) $4\sqrt{2}$ 6) $9\sqrt{5}$ 7) $\sqrt{3}$ 8) $11\sqrt[3]{2}$
2. 1) $6\sqrt{2}$ 2) $-24\sqrt{10}$ 3) $\sqrt{6}+2$ 4) 3
3. 1) $2\sqrt{3}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) 5 4) $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}$

เฉลยกิจกรรมบทที่ 3

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1

1. จงเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก
   1) A เป็นเซตชื่อของปีนักษัตร
      A = {ชวด, ฉลู, ขาล, เถาะ, มะโรง, มะเส็ง, มะเมีย, มะแม, วอก, ระกา, จอ, กุน}
   2) $M = \{x \mid x \in N$ และ $5 \le x \le 10\}$
      $M = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
   3) P = {x | x เป็นพยัญชนะในคำว่า philippine}
      P = {p, h, i, l, n, e}
2. จงเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไข
   1) N = {มกราคม, มีนาคม, พฤษภาคม, กรกฎาคม, สิงหาคม, ตุลาคม, ธันวาคม}
      N = {x | x เป็นเดือนที่ลงท้ายด้วยคม}
   2) $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
      $B = \{x \mid x \in N$ และ $2 \le x \le 10\}$
   3) D = เป็นเซตของจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 – 25 และ 3 หารลงตัว
      $D = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$
3. กำหนดให้ $U = \{x \mid x \in N$ และ $x \le 15\}$
   $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$
   $C = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

   จงหา
   1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14\}$
   2) $A \cap C = \{3\}$

3) $B - C$ = $\{2, 4, 8, 10, 14\}$

4) B' = $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

5) $(A \cup B) \cap C$ = $\{3, 6, 12\}$

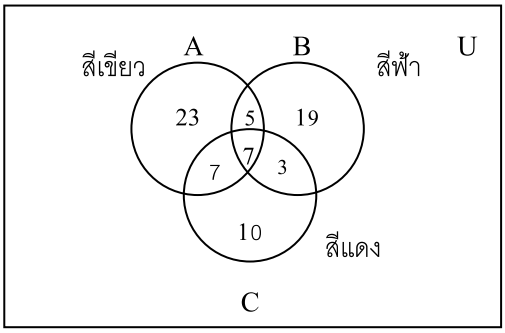
6) $(A \cap B)' - C$ = $\{1, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15\}$

4. จากการสอบถามเด็กผู้ชาย 75 คน ชอบของเล่นที่เป็นรถสีแดง 27 คน สีฟ้า 34 คน สีเขียว 42 คน ชอบทั้งสีแดงและสีเขียว 14 คน ชอบทั้งสีฟ้าและสีเขียว 12 คน ชอบสีแดงและสีฟ้า 10 คน ชอบทั้งสามสี 7 คน จงหาว่าเด็กที่ชอบของเล่นที่เป็นรถเพียงสีเดียวมีกี่คน

วิธีทำ A = ชอบสีเขียว 42 คน

B = ชอบสีฟ้า 34 คน

C = ชอบสีแดง 27 คน

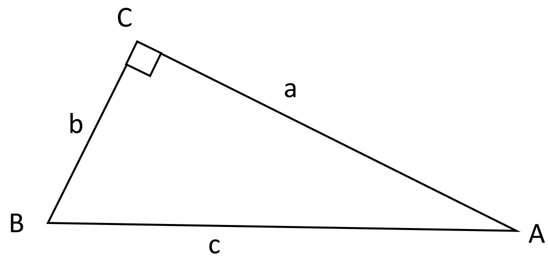


จำนวนเด็กผู้ชายที่ชอบของเล่นที่เป็นรถเพียงสีเดียว = 23 + 19 + 10 = 52 คน

เฉลยกิจกรรมบทที่ 5

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1

1. จงหาว่าอัตราส่วนตรีโกณมิติที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นค่าไซน์ (sin) หรือโคไซน์ (cos) หรือแทนเจนต์ (tan) ของมุมที่กำหนดให้



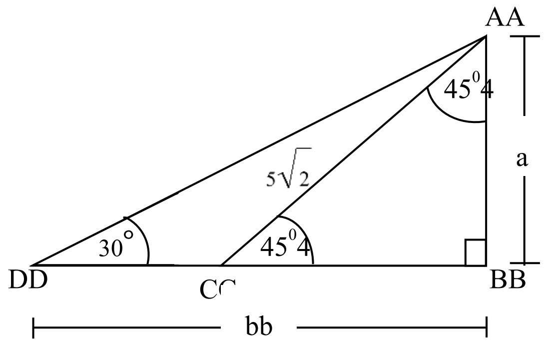
1) $\sin A = \frac{b}{c}$

2) $\tan A = \frac{b}{a}$

3) $\sin B = \frac{a}{c}$

4) $\cos B = \frac{b}{c}$

2. จงหาค่า a และ b จากรูปที่กำหนดให้



Δ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\cos B\hat{A}C = \cos 45^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{5\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad a = 5$$

เนื่องจาก Δ ABC เป็น Δ หน้าจั่ว $\therefore$ AB = BC = 5

Δ ABD เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\tan A\hat{D}B = \tan 30^0 = \frac{AB}{BD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{b}$$

$$\therefore \quad b = 5\sqrt{3}$$

3. จงหาค่าของ

1) $\sin 30^\circ - \cos 30^\circ + \sin 60^\circ - \cos 60^\circ + \tan 45^\circ$

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 1$$

2) $\tan^2 45^\circ - \sin 30^\circ \cdot \operatorname{cosec}^2 60^\circ$

$$= (1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}$$

3) $\dfrac{\sin 30^{\circ} \cdot \operatorname{cosec}^{2} 30^{\circ} + \cos 60^{\circ} \cdot \sec^{2} 60^{\circ}}{\tan^{2} 45^{\circ} \cdot \sin 30^{\circ}}$

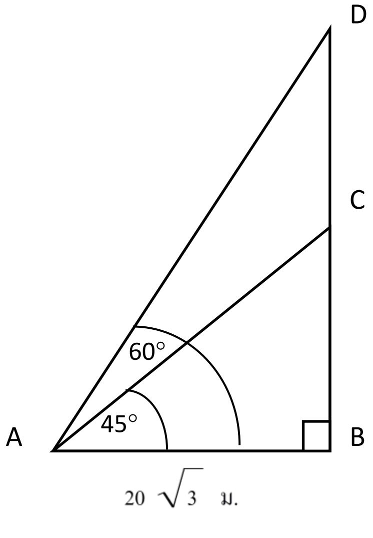
$= \dfrac{\frac{1}{2} \cdot (2)^{2} + \frac{1}{2}(2)^{2}}{(1)^{2} \cdot \frac{1}{2}} = 8$

4) $\dfrac{\sin^{2} 60^{\circ} \cdot \cos^{2} 60^{\circ}}{\tan^{2} 45^{\circ}} + \dfrac{2\cos^{2} 30^{\circ}}{\sec 60^{\circ}}$

$= \dfrac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2}}{1} + \dfrac{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2}}{2}$

$= 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$

4. มานะยืนห่างจากตึก 20 เมตร มองเห็นยอดตึกเป็นมุมเงย 45° และเห็นเสาอากาศที่ตั้งอยู่บนยอดตึกเป็นมุมเงย 60° จงหาว่าเสาอากาศสูงจากตึกเท่าไร (กำหนด $\sqrt{3}$ = 1.73)



ΔABC เป็น Δหน้าจั่ว

$\therefore$ BC = AB = $20\sqrt{3}$

.ให้ DC สูง x เมตร

$\therefore$ DB = $20\sqrt{3}$ + x เมตร

$\tan A = \dfrac{DB}{AB}$

$\tan 60^{\circ} = \dfrac{20\sqrt{3} + x}{20\sqrt{3}}$

$\sqrt{3} = \dfrac{20\sqrt{3} + x}{20\sqrt{3}}$

$20 \times 3 = 20\sqrt{3} + x$

$x = 20 \times 3 - 20\sqrt{3}$

$= 20\ (3 - 1.73)$

$= 20 \times 1.27$

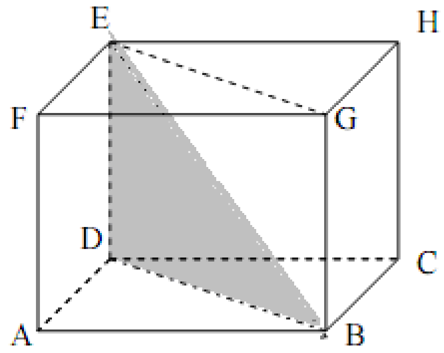
$= 25.40$

$\therefore$ เสาอากาศสูงจากตึกประมาณ 25.4 เมตร

เฉลยกิจกรรมบทที่ 6

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1

1. กำหนดมุมสี่เหลี่ยมมุมฉากดังรูป



ก. (ตอบ สี่เหลี่ยมผืนผ้า)

ข. (ตอบ 90 องศา)

ค. (ตอบ แนวทแยง)

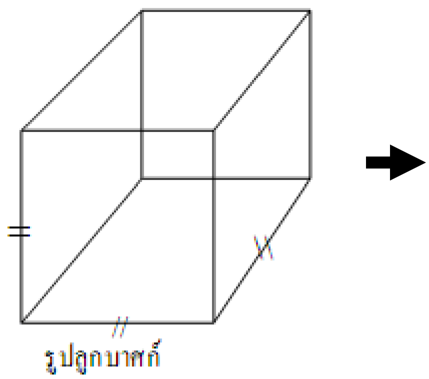
ง. (ตอบ ΔBDE 2 รูป ประกอบกันเป็น □ BDEG)

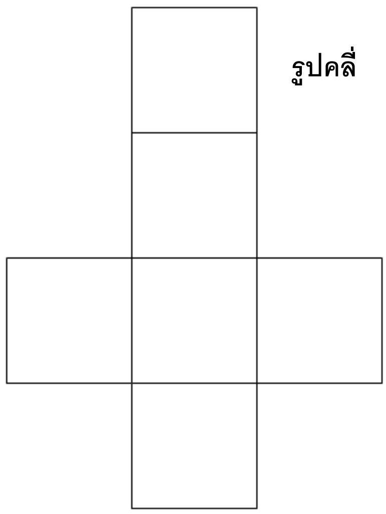
2. จงเขียนรูปคลี่ของทรงสามมิติต่อไปนี้

<u>ตอบ</u> รูปคลี่ของทรงสามมิติต่อไปนี้

รูปต้นแบบ **รูปคลี่**

(1)

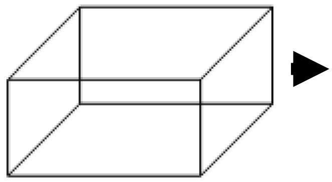


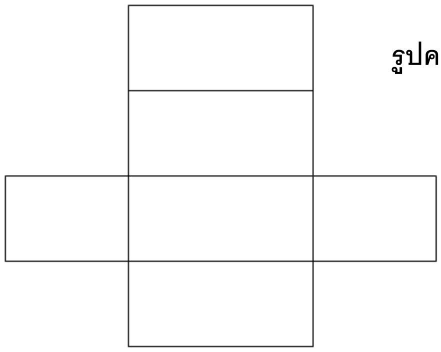


รูปต้นแบบ

รูปคลี่

(2)

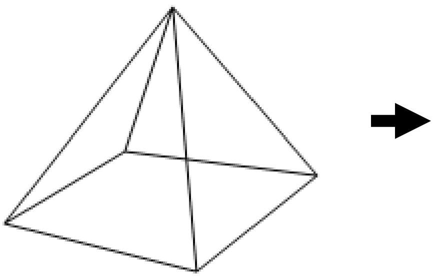


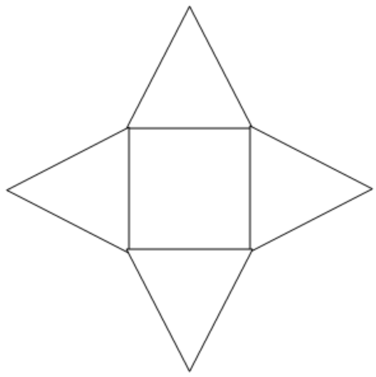


รูปต้นแบบ

รูปคลี่

(3)





เฉลยกิจกรรมบทที่ 7

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1

1. ค่าเฉลี่ย $\bar{x} = \dfrac{560}{20}$ 47.95 = 28

มัธยฐาน i) เรียงข้อมูล 12 13 15 18 24 24 26 2 28 28 28 28 29 32 34 34 40 40 40 40

x) ตำแหน่งของมัธยฐาน $= \dfrac{n+1}{2} = 10.5$

$\therefore$ มัธยฐาน $= \dfrac{28+28}{2} = 28$

ฐานนิยม 28 และ 40

2. ตารางแสดงคะแนนของนักเรียน

คะแนน	ความถี่ (f_1)	จุดกึ่งกลาง (x_i)	$f_i x_i$	ความถี่สะสม
18 – 22	2	20	40	2
23 – 27	8	25	200	10
28 – 32	15	30	450	25
33 – 37	11	35	385	36
38 – 42	3	40	120	39
43 – 47	1	45	45	40
	$\sum f = n =$		$\sum fx = 1240$	

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต $(\bar{x}) = \dfrac{\sum fx}{\sum f} = \dfrac{1240}{40} = 31$

$\therefore$ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คือ 31

2. มัธยฐาน : $\dfrac{N}{2} = \dfrac{80}{2} = 20$ $\therefore$ มัธยฐานอยู่ในขั้น 28 – 32

อันตรภาคชั้นที่มีมัธยฐานอยู่คือ 28 – 32 มี $i = 5$, $Lo = 27.5$, $\sum f =$

จากสูตร $Md = Lo + i\left\{\dfrac{\frac{N}{2} - \sum f_i}{fm}\right\}$

$$Md = 27.5 + 5\left\{\frac{20 - 10}{15}\right\} = 27.5 + 3.33 = 30.83$$

$\therefore$ มัธยฐานเท่ากับ 30.83

3. ฐานนิยม : ฐานนิยมอยู่ในชั้น 28 – 32 (ชั้นที่มีความถี่สูงสุด)

จากสูตร $Mo = Lo + i\left\{\dfrac{d_1}{d_1 + d_2}\right\}$

เมื่อ $Lo = 27.5$, $d_1 = 15 - 8 = 7$, $d_2 = 15 - 11 = 4$, $i = 5$

$$Mo = 27.5 + 5\left(\frac{7}{7 + 4}\right) = 30.68$$

$\therefore$ ฐานนิยมเท่ากับ 30.68

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 2

1. 1) 1.1) กำไร 2 ล้านบาท 1.2) กำไร 4 ล้านบาท 1.3) กำไร 4 ล้านบาท
   1.4) กำไร 8 ล้านบาท 1.5) กำไร 4 ล้านบาท 1.6) กำไร 6 ล้านบาท

   2) เดือน เม.ย.

   3) เดือน ม.ค.

   4) เดือน ก.พ. เดือน มี.ค. เดือน พ.ค.

   5) ไม่มี

2. การเลือกข้อมูลมาใช้ประกอบการตัดสินใจต้องอาศัยหลักการใดบ้าง
   1. เชื่อถือได้
   2. ครบถ้วน
   3. ทันสมัย

3. ข้อมูล ต่างกับ สารสนเทศ อย่างไร จงอธิบายพร้อมยกตัวอย่างประกอบด้วย

   ข้อมูล หมายถึง ข้อเท็จจริง หรือเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องกับสิ่งต่างๆ เช่น บุคคล สิ่งของ สถานที่ ฯลฯ ข้อมูลเป็นเรื่องเกี่ยวกับเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นอย่างต่อเนื่อง ข้อมูลถูกต้องแม่นยำ ครบถ้วนขึ้นอยู่กับผู้ดำเนินการที่ให้ความสำคัญของความรวดเร็วของการเก็บข้อมูล

   สารสนเทศ เกิดจากการนำข้อมูล ผ่านระบบการประมวล คำนวณ วิเคราะห์และแปล ความหมายเป็นข้อความที่สามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้

เฉลยกิจกรรมบทที่ 9

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1

1. นางสมหมายเป็นตัวแทนขายเครื่องกรองน้ำที่มีราคา 35,000 บาท ให้กับบริษัทแห่งหนึ่ง บริษัทคิดค่านายหน้า 30% อยากทราบว่านางสมหมายได้เงินค่านายหน้าเท่าไร

แนวคิด

$$35{,}000 \times \frac{30}{100} = 10{,}500 \text{ บาท}$$

2. สมใจถือหุ้นบุริมสิทธิของบริษัทผลิตปลากระป๋องแห่งหนึ่ง จำนวน 200 หุ้น มูลค่าหุ้นละ 180 บาท อัตราเงินปันผล 8% เมื่อสิ้นปีสมใจจะได้เงินปันผลทั้งหมดเท่าไร

แนวคิด

$$\frac{8}{100} \times 180 \times 200 = 2{,}880$$

คำสั่งสำนักงานส่งเสริมการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัย

ที่ ๙๑๗ /๒๕๕๙

เรื่อง แต่งตั้งคณะกรรมการจัดทำสื่อสรุปสาระความรู้พื้นฐาน รายวิชาคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น และระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

เพื่อให้การดำเนินการจัดทำสื่อสรุปสาระความรู้พื้นฐาน รายวิชาคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น และระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย มีความเหมาะสมกับผู้เรียน เป็นไปตามเป้าหมายที่หลักสูตรกำหนด อาศัยอำนาจตามความในมาตรา ๑๔ แห่งพระราชบัญญัติส่งเสริมการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัย พ.ศ. ๒๕๕๑ จึงแต่งตั้งคณะกรรมการ ประกอบด้วย

ที่ปรึกษา

๑. นายสุรพงษ์ จำจด	เลขาธิการ กศน.
๒. นายกิตติศักดิ์ รัตนฉายา	รองเลขาธิการ กศน.
๓. นายประเสริฐ หอมดี	รองเลขาธิการ กศน.

หน้าที่

ให้คำปรึกษา แนะนำ และสนับสนุน การดำเนินการจัดทำสื่อสรุปสาระความรู้พื้นฐาน รายวิชาคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น และระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

คณะกรรมการ

๑. นายคมกฤช จันทร์ขจร	ผู้อำนวยการสถาบันการศึกษาทางไกล	ประธานกรรมการ
๒. นางกิตติยา รัศมีพงศ์	รองผู้อำนวยการสถาบันการศึกษาทางไกล	รองประธานกรรมการ
๓. นางพรรณทิพา ชินชัชวาล	ผู้อำนวยการกลุ่มพัฒนาระบบการทดสอบ	กรรมการ
๔. นายวุฒิชัย ศรีวสุธากุล	ข้าราชการบำนาญ	กรรมการ
๕. นางกนกวลี อุษณกรกุล	ข้าราชการบำนาญ	กรรมการ
๖. นางพรทิพย์ กล้ารบ	ข้าราชการบำนาญ	กรรมการ
๗. นายอร่าม คุ้มทรัพย์	ข้าราชการบำนาญ	กรรมการ
๘. นางชนันรัตน์ รัตนพงศ์ทอง	ข้าราชการบำนาญ	กรรมการ
๙. นางสาววรวรรณ เบ็ญจนิรัตน์	ข้าราชการบำนาญ	กรรมการ

๑๐. นายรณชัย...

๑๐. นายรณชัย มาเจริญทรัพย์	โรงเรียนสายน้ำผึ้งในพระอุปถัมภ์	กรรมการ
๑๑. นางสาวอันน์เกตุ พงศ์เพ็ชร์	วิทยาลัยนาฏศิลป	กรรมการ
๑๒. นายพิชาญ พรหมสมบัติ	วิทยาลัยนาฏศิลป	กรรมการ
๑๓. นางสาวพจน์วรรณ ชัยประดิษฐ์	วิทยาลัยนาฏศิลป	กรรมการ
๑๔. นายอาคิรา ยูวนิมิ	สถาบันอาศรมศิลป์	กรรมการ
๑๕. นายธานี เครืออยู่	สำนักงาน กศน.	กรรมการ
๑๖. นางสาวขจี หวานนุรักษ์	กศน. เขตพญาไท	กรรมการ
๑๗. นางสาวสวรรค์ พลฉกรรณ์	สถาบันการศึกษาทางไกล	กรรมการ
๑๘. นางสาวประภารัช ทิพย์สงเคราะห์	สถาบันการศึกษาทางไกล	กรรมการ
๑๙. นายเกรียงไกร มหาโชคดิลก	สถาบันการศึกษาทางไกล	กรรมการ
๒๐. นางพิชญา นัยนิตย์	สถาบันการศึกษาทางไกล	กรรมการและเลขานุการ

ให้คณะกรรมการมีหน้าที่จัดทำสื่อสรุปสาระความรู้พื้นฐาน รายวิชาคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น และระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เพื่อให้เหมาะสมกับผู้เรียนและบรรลุจุดมุ่งหมายของหลักสูตร

ทั้งนี้ ตั้งแต่บัดนี้เป็นต้นไป

สั่ง ณ วันที่ ๑๗ พฤษภาคม พ.ศ. ๒๕๕๙

(นายสุรพงษ์ จำจด)
เลขาธิการ กศน.

คณะผู้จัดทำ

ที่ปรึกษา

นายสุรพงษ์	จำจด	เลขาธิการ กศน.
นายกิตติศักดิ์	รัตนฉายา	รองเลขาธิการ กศน.
นายประเสริฐ	หอมดี	รองเลขาธิการ กศน.

คณะผู้เขียนสรุปเนื้อหา

นางพรรณทิพา	ชินชัชวาล	ผู้อำนวยการกลุ่มพัฒนาระบบการทดสอบ
นางพรทิพย์	กล้ารบ	ข้าราชการบำนาญ
นางกนกวลี	อุษณกรกุล	ข้าราชการบำนาญ
นายวุฒิชัย	ศรีวสุธากุล	ข้าราชการบำนาญ
นายรณชัย	มาเจริญทรัพย์	โรงเรียนสายน้ำผึ้ง ในพระอุปถัมภ์ฯ

คณะทำงาน

นายคมกฤช	จันทร์ขจร	ผู้อำนวยการสถาบันการศึกษาทางไกล
นางกิตติยา	รัศมีพงศ์	รองผู้อำนวยการสถาบันการศึกษาทางไกล
นางพิชญา	นัยนิตย์	สถาบันการศึกษาทางไกล
นางสาวสวรรค์	พลฉกรรณ์	สถาบันการศึกษาทางไกล
นางสาวประภารัช	ทิพย์สงเคราะห์	สถาบันการศึกษาทางไกล
นายเกรียงไกร	มหาโชคดิลก	สถาบันการศึกษาทางไกล

ผู้พิมพ์ต้นฉบับ

นางสาวประภารัช	ทิพย์สงเคราะห์	สถาบันการศึกษาทางไกล
นายเกรียงไกร	มหาโชคดิลก	สถาบันการศึกษาทางไกล

ผู้ออกแบบปก

นายศุภโชค ศรีรัตนศิลป์	กลุ่มพัฒนาการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัย

ออกแบบปก : ศุภโชค ศรีรัตนศิลป์